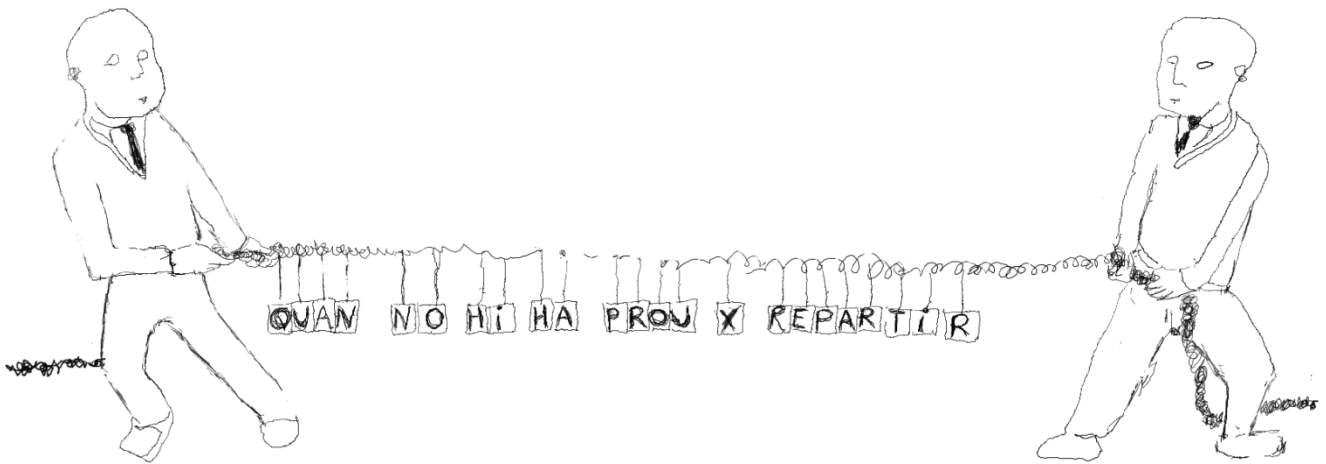


QUAN NO HI HA PROU PER REPARTIR.

Com distribuir drets d'emissió de CO₂



Kadir Calleja Garrigós

2n de Batxillerat Institut Verdaguer

TREBALL DE RECERCA

19 de Gener del 2021

Tutors: Natacha Peña i Pere Calleja

Agraïments

Agraïments a la dedicació i gran suport de la Natacha Peña. Especial gratitud també al programa FORCES de la Universitat de Barcelona per donar-me l'oportunitat de desenvolupar aquest treball amb la col·laboració del Pere Calleja. Estem molt agraïts a la Cori Vilella de la Universitat Rovira i Virgili per l'ajuda en l'obtenció i tractament de dades. Per últim, agreixo al Javier Lerín per la il·lustració de la portada.

Contingut

ABSTRACT	1
1. INTRODUCCIÓ.....	2
2. QUANT PODEM CONTAMINAR?.....	4
2.1 Externalitats negatives.....	4
2.2 Tipus de regulació	7
2.3 Obtenció de les dades	8
3. QUAN NO HI HA PROU PER REPARTIR	10
3.1 Descripció del problema	10
3.2 Principals propostes de repartiment.....	11
3.2.1 Proporcionalitat	12
3.2.2 Constrained Equal Awards.....	13
3.2.3 Constrained Equal Losses	16
3.2.4 Talmud.....	18
4. NO MANIPULABILITAT. PENSANT EN TERMES INDIVIDUALS.....	22
4.1 Un nou conjunt d'agents: les persones	22
4.2 Proporcionalitat.....	24
4.3 Constrained Equal Awards	24
4.4 Constrained Equal Losses	25
4.5 Talmud	27
4.6 No manipulabilitat	30
5. CONCLUSIONS.....	34
Bibliografia	36

ABSTRACT

This research work is devoted to the study of how CO₂ permits should be distributed among the economic agents that provoke CO₂ emissions. We take the proportional and the egalitarian (in different versions) approach to the allocation of the amount of CO₂ that would cause an increase of 2°C in the temperature of the Earth in 2050 according to the demands made by the 5 regions considered in the IPCC reports and for the most pessimistic scenario in such reports (RCP 8.5).

We point out that a discussion about the relevant agents to be taken into consideration in the bargaining problem of CO₂ permits are crucial, by observing that the amount received by the regions drastically change if we formulate the problem by means of the population of the regions instead.

Finally, we study what rules are manipulable by the definition of the agents and by merging and splitting movements of those. We conclude that non-manipulability is equivalent to proportionality and then, in contradiction with egalitarianism.

1. INTRODUCCIÓ

Aquest treball es desenvolupa en el marc del programa FORCES (Foment de la Recerca en els centres de secundària) de la Universitat de Barcelona (UB) que construeix ponts entre els investigadors dels grups de recerca de la Universitat i els instituts de secundària per tal de donar suport a la realització de Treballs de Recerca. A través d'aquest programa vam poder contactar amb el Pere Calleja, investigador del grup de recerca "Game Theory and Assignments Markets" del Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial de la UB. La proposta sobre el títol "Quan no hi ha prou per repartir. Pensar matemàticament" consisteix en investigar, utilitzant un model matemàtic i senzill, com s'han de repartir de forma "justa" els drets d'emissió de CO₂, que provoquen l'efecte hivernacle, l'escalfament de la Terra i en conseqüència el canvi climàtic, entre els agents econòmics que contaminen. Aquesta proposta s'emmarca en els objectius de desenvolupament sostenible de les Nacions Unides següents: Acció climàtica (13) i Pau, justícia i institucions sòlides (16).

La temàtica em va cridar l'atenció, sobretot perquè el canvi climàtic és un tòpic del qual es parla a tot arreu i n'estic molt conscienciat, però també em va captivar la possibilitat d'aprendre diferents formes de distribuir un recurs (drets d'emissions de CO₂) de forma "justa".

En la primera part del treball expliquem què és una externalitat negativa. La gran majoria de les activitats que fem diàriament, com ara encendre el llum, cuinar o fabricar un cotxe tenen un cost per a la societat en termes de contaminació que no es té en compte, és el que s'anomena una externalitat negativa. Nosaltres volem estudiar l'externalitat associada a les emissions de CO₂ que provoquen aquestes activitats diàries. Analitzem, des d'una perspectiva teòrica, la relació entre cost social i benefici social per tal de ser capaços d'esbrinar quant podem contaminar. Per a dur a terme aquesta primera part del treball ens hem ajudat del llibre "Fundamentos de Economía" de Krugman et al. (2013). Des d'una perspectiva més pràctica ens recolzem en els resultats de Meinshausen et al. (2009) que estimen les gigatonnes de CO₂ que provocarien un augment de la temperatura mitjana de la Terra de 2°C entre els anys 2000 i 2050, cosa que provocaria uns costos socials inadmissibles. Prenem la mateixa aproximació que Giménez-Gómez et al. (2016) i Duro et al. (2020) que consideren que aquestes gigatonnes han de ser distribuïdes en funció de les necessitats de CO₂ dels agents econòmics entre 2000 i 2050. Ens recolzem, com ells, amb les dades de projeccions d'emissions de CO₂ proporcionades pels grups de recerca del IPCC (Intergovernmental Panel on Climate Change) de les Nacions Unides. Aquests informes, en concret IPCC 2014, agrupen els països de la Terra en 5 regions i estimen projeccions d'emissions de CO₂ per regions en 4 escenaris diferents. Nosaltres analitzarem el més pessimista d'aquests escenaris, que no s'ha analitzat en els treballs anteriors. Hem d'agrair a la Cori Vilella l'ajuda en l'obtenció i el tractament de les dades.

Com repartir drets de CO₂ entre les regions que fan demandes que no es poden satisfer és un problema de justícia distributiva. Tota societat té regles per compartir béns i obligacions entre els seus membres. Els problemes de justícia distributiva, envaeixen la nostra economia i la nostra política. La justícia distributiva fa referència a la manera més “justa” de repartir un recurs escàs. Hi ha dos llibres de capçalera: “How to divide when there isn’t enough. From Aristotle, the Talmud and Maimonides to the Axiomatics of Resource Allocation” de Thomson (2019) i “Equity. In Theory and Practice” de Young (1994). En la segona part del treball interpretem els principis filosòfics de proporcionalitat i d’igualitarisme. Explicarem i aplicarem pel cas de distribució de drets d’emissió de CO₂ la regla proporcional, la CEA (Constrained Equal Awards -igual en guanys-), la CEL (Constrained Equal Losses -igual en pèrdues-) i la regla del Talmud (combinació de la CEA i la CEL).

L’última part del treball és la més innovadora. Volem aportar un punt de vista en el qual es tingui en compte la població de les diferents regions a l’hora de distribuir. Aleshores, en el nou problema, considerem que els agents econòmics, aquells que han de rebre els drets d’emissió de CO₂, no són les 5 regions que consten en els informes del IPCC, sinó la població mundial: 7 450 130 207 habitants (dades obtingudes del Banc Mundial). Entendrem que la demanda associada a una regió es repartirà a parts iguals entre els seus habitants. Ens preocupa com de robustos són els principis de proporcionalitat i d’igualitarisme si prenem aquest altre punt de vista. La pregunta és important perquè creiem que són les persones les que han de ser destinatàries dels drets d’emissions de CO₂. Al tornar a calcular les regles citades anteriorment amb el nou conjunt de demandants (la població mundial) observem que les regles basades en el principi d’igualitarisme no són robustes, és a dir, les regions obtenen quantitats diferents si negocien com a regió que si negocien els habitants de la regió. En canvi, la regla proporcional sí que és robusta: sota aquest principi les regions obtenen la mateixa quantitat si negocien com a regió que si negocien els habitants de la regió. Per tal de testejar com de robusta és la regla proporcional en front de possibles divisions o unions dels agents involucrats en el problema estudiarem el treball de de Frutos (1999), que posa el focus sobre les regles que són o no manipulables pels agents en cas de dividir-se (per exemple, si una regió es divideix en els seus habitants) o d’agregar-se (per exemple, si els habitants d’una regió es constitueixen en una regió).

Aquest treball està organitzat de la següent manera. El capítol 2 conté els coneixements d’una externalitat negativa. Al capítol 3 es planteja el problema de distribució de drets d’emissió entre regions i es fan els càlculs de la regla proporcional, la CEA, la CEL i la regla del Talmud. Al capítol 4 es calculen de nou aquestes regles quan distribuïm entre persones i s’introdueix el concepte de la no manipulabilitat. Al capítol 5 s’interpreten els resultats obtinguts.

2. QUANT PODEM CONTAMINAR?

En aquest capítol, explicarem que és una externalitat, en concret la contaminació per CO₂, els elements importants per trobar els nivells admissibles de contaminació i les polítiques per implementar aquests nivells admissibles. Per preparar-ho hem seguit principalment el capítol 9 del llibre “Fundamentos de Economía” de Krugman et al. (2013). Per a una discussió matemàticament més formal la referència bàsica és el llibre “Microeconomic Theory” de Mas-Colell et al. (2012).

2.1 Externalitats negatives

En quasi totes les activitats del nostre dia a dia, com per exemple encendre el llum, anar en cotxe, fabricar un ordinador, etc... generem contaminació, en particular emetem CO₂ a l'atmosfera. De fet, diem que aquest CO₂ que emetem és una externalitat negativa perquè perjudica a tothom.

La paraula externalitat ve del fet que el cost per a tots que té la quantitat de CO₂ en l'atmosfera, no es té en compte a l'hora de produir energia, conduir un cotxe, fabricar un ordinador, cuinar, etc. Ningú paga el cost social que provoca un excés de CO₂ a l'atmosfera i per tant, tothom en prendre les decisions individuals entén que el cost (preu) d'emetre CO₂ és igual a zero.

Vol dir això que hem de prohibir encendre el llum, anar en cotxe o utilitzar ordinadors? No, aquestes activitats també comporten un benefici individual i social. La relació entre el cost social de la contaminació i el benefici social associat a les activitats que generen aquesta contaminació, expressat en funció de la quantitat de contaminació (CO₂) necessària per a realitzar aquestes activitats, és fonamental per esbrinar quin és el nivell de contaminació (CO₂) òptim per a la societat. No val a dir que la mesura de costos i beneficis socials associats a l'emissió de CO₂ és una recerca molt i molt complicada.

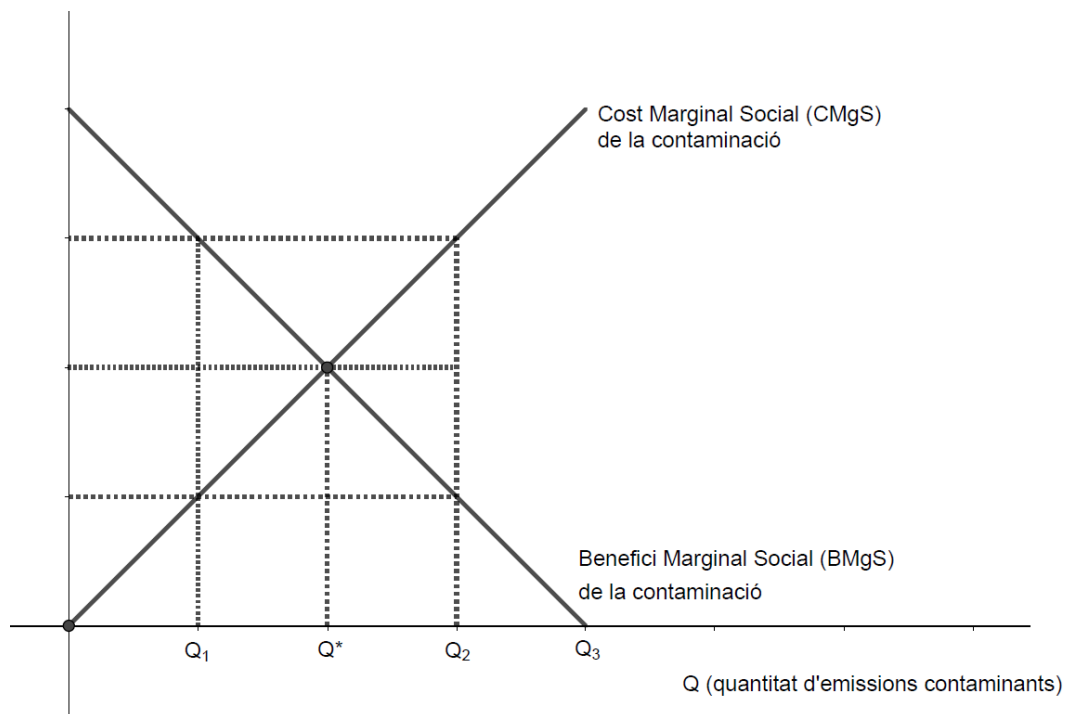
Els documents dels grups de treball associats amb el IPCC (Grup Intergovernamental d'Experts sobre el Canvi Climàtic) de les Nacions Unides són especialment importants per a entendre l'impacte dels excessos de CO₂ en l'atmosfera sobre el clima i per tant sobre els costos associats. L'últim “synthesis report” d'aquests documents de recerca, en gran varietat d'àmbits, data del 2014, tot i que al 2022 està plantejat publicar-ne un d'actualitzat.

La contaminació que emetem a l'hora de realitzar certes activitats reporta, doncs, uns costos i beneficis a la societat. Però si l'emissió de contaminació no està regulada, aleshores, les decisions que prenen els agents a l'hora de dur a terme les activitats contaminants només tenen en compte els beneficis de la contaminació. Actualment ningú té en compte els costos de la contaminació. És per això que la contaminació és un cost extern.

Amb l'objectiu d'esbrinar quin és el nivell òptim (o admissible) de contaminació (per CO₂) per a la societat introduïrem els conceptes de cost marginal social i benefici marginal social:

- **Benefici marginal social (BMgS):** és una funció que associa a cada unitat de contaminació (Q), els beneficis addicionals d'emetre una unitat més de contaminació, tots els beneficis expressats en unitats monetàries. Fonamentalment, el benefici social és una funció que assigna a cada nivell de contaminació el benefici en € per a la societat, i el benefici marginal social és la funció derivada del benefici social. Òbviament el benefici social ha de ser creixent, però imposarem que el benefici marginal social sigui decreixent. Un principi fonamental en economia és el de benefici marginal decreixent, és a dir, el benefici que reporta la primera unitat de contaminació emesa, és més gran que el que reporta la segona, etc. Matemàticament, la funció de benefici social és creixent, convexa i afitada superiorment. Quan la quantitat d'emissions (contaminació) tendeix a ∞ , el benefici social no augmenta de forma infinita, tendeix a un valor "màxim". Per tant la funció benefici marginal social és decreixent i quan Q tendeix a ∞ aleshores el BMg social tendeix a zero.
- **Cost marginal social (CMgS):** és una funció que associa a cada unitat de contaminació, els costos addicionals d'emetre una unitat més de contaminació, tots els costos expressats en unitats monetàries. Fonamentalment, el cost social és una funció que assigna a cada nivell de contaminació el cost en € per a la societat, i el cost marginal social és la funció derivada del cost social. Evidentment, el cost social ha de ser creixent, però a més a més, i aquest també és un principi fonamental en economia, la funció de cost social és còncava, i per tant si el nivell de contaminació és gran, cada unitat més de contaminació té un cost més gran que la immediatament anterior i per això representem una funció de cost marginal social creixent. Matemàticament, la funció de costos socials és creixent i còncava. A més a més, quan Q tendeix a ∞ , els costos socials també. Per tant, la funció de cost marginal social és creixent i quan Q tendeix a ∞ els costos marginals socials també ho fan.

En la següent gràfica il·lustrem els costos i beneficis marginals socials. Farem la simplificació que ambdues funcions són lineals.



Amb l'ajut del gràfic podem explicar per què els científics proposen Q^* , com la quantitat òptima (admissible) de contaminació en la societat.

Per explicar-ho pensem primer que contaminem $Q_1 < Q^*$, aleshores $BMgS(Q_1) > CMgS(Q_1)$ i per tant surt a compte emetre una unitat més de contaminació (CO_2). Q_1 no pot ser òptima perquè hi ha incentius socials a contaminar més.

Pensem ara que contaminem $Q_2 > Q^*$, aleshores $BMgS(Q_2) < CMgS(Q_2)$ i, per tant, surt a compte emetre una unitat menys de contaminació (CO_2). Q_2 no pot ser òptima perquè hi ha incentius socials a contaminar menys.

En canvi, per a Q^* , quan $BMgS(Q^*) = CMgS(Q^*)$, no hi ha incentius a contaminar més, ni tampoc a contaminar menys.

Podria una economia de mercat, basada en incentius individuals, arribar a aquesta quantitat socialment òptima de contaminació? **NO**, no podria. Evidentment es necessita un regulador, un govern. Sense regulador la quantitat d'emissió seria Q_3 , ja que és on el $BMgS = 0$ i, per tant, es maximitza la funció de Benefici Social (BS). O inclús pitjor, en el supòsit que el $BMgS$ tendís a zero (però no fos zero) quan Q tendeix a ∞ , sense cap regulador la societat tendiria a contaminar infinit, amb les conseqüències catastròfiques pel clima i de retruc per a la societat mateixa.

Una de les principals dificultats per al control de la contaminació (emissions CO_2) és la falta de regulador, govern o controlador mundial. És per això que cada cert temps es reuneixen els països per intentar arribar a acords que acostin la contaminació per

CO₂ a la quantitat òptima. La primera conferència pel clima va ser a Estocolm l'any 1972. Després, l'any 1988, van aparèixer els IPCC de les Nacions Unides, però la reunió que de veritat va ser de gran importància és la que es va arribar a un acord anomenat Protocol de Kyoto l'any 1997. És en aquesta conferència on els diferents països van poder arribar a un acord d'emetre menys emissions durant un període (2008-2012). La última reunió o conferència pel clima que es va dur a terme es va celebrar a Madrid (COP 25 al 2019).

En l'actualitat els experts i científics consideren que els costos socials serien molt grans (i per tant també el CMGs) si la temperatura mitjana de la Terra superés 2 °C en el 2050. Això vol dir que el CS tendria a ∞ (i per tant també el CMGs) si les emissions fossin tals que la temperatura mitjana del planeta augmentés 2 °C al 2050. Aquesta observació implica que per molt gran que sigui el BS (i per tant el BMGs), la quantitat òptima d'emissions mai pot ser superior a aquella Q d'emissions que fa que la temperatura pugi 2 °C al 2050. En particular, podeu consultar els informes IPCC (concretament el AR5 Climate Change 2014: Impacts, Adaption, and Vulnerability) per obtenir informació sobre els impactes (costos) que té el canvi climàtic en els diferents continents.

Meinshausen et al. (2009) al seu article a la prestigiosa revista Nature, estudien quina és aquesta quantitat de CO₂ acumulada en l'atmosfera que provocaria aquest augment inadmissible de 2°C en la temperatura mitjana de la Terra. En aquest treball es plantegen 3 possibles escenaris. En el primer, s'estima que si l'atmosfera acumula 1440 Gt de CO₂ en el 2050 la temperatura de la Terra augmentaria 2°C amb una probabilitat del 50%. El segon estima que si fossin 1000 Gt de CO₂ en el 2050, la temperatura augmentaria 2°C amb un 25%. I en l'últim escenari s'estima que una quantitat acumulada de CO₂ en l'atmosfera de 745 Gt provocaria un augment de 2°C amb probabilitat zero. Al llarg d'aquest treball considerarem aquests tres possibles escenaris que determinen, la quantitat de CO₂ admissible en l'atmosfera al 2050.

2.2 Tipus de regulació

En el cas d'externalitats negatives, si no hi ha cap tipus d'intervenció per part del govern, això implica que els que decideixen quina quantitat de contaminació (CO₂) poden emetre són els mateixos que tenen beneficis amb aquestes emissions. Com hem explicat, quanta més contaminació (de CO₂) emetin més beneficis tindran. Per tal de tenir en compte també els costos socials s'ha de regular.

N'hi ha varies maneres de regular: impostos sobre emissions, impostos sobre els bens que provoquen emissions, quotes màximes d'emissió amb multes, o prohibicions directes. Però hi ha una manera molt interessant i que és la que es va proposar al protocol de Kyoto (1997), que és la regulació per drets d'emissions.

Aquesta política consisteix en crear drets d'emissions de CO₂ (que provoca l'externalitat negativa). Qualsevol persona que vulgui portar a terme una activitat que comporti l'emissió de CO₂ a l'atmosfera haurà d'estar, **per llei**, en possessió dels corresponents drets d'emissió. En total es creen tants drets d'emissió com la quantitat de CO₂ que considerem òptima per a la societat. Com hem discutit abans, en aquest treball considerarem que la quantitat òptima de CO₂ respon als càlculs de Meinshausen et al. (2009), amb tres possibles escenaris. Com que no hi ha més drets que aquells que garanteixen una quantitat socialment òptima d'emissions, assegurarem que només aquestes emissions es fan a l'atmosfera.

Aquesta política de control d'emissions permet, a més a més, la creació d'un mercat de drets d'emissions de CO₂, on es poden comprar i vendre aquests permisos. D'aquesta manera el mateix mercat incentiva a invertir en tecnologies netes, per no tenir necessitat de comprar tants drets d'emissions. Si un agent és molt "net" podria fins i tot obtenir una contrapartida monetària en vendre els seus drets d'emissió a tercers.

Una qüestió fonamental és com distribuir inicialment la quantitat de Gt de CO₂ acordades com a socialment òptimes en drets entre els agents implicats, que poden ser regions, països, famílies, persones, etc... L'intercanvi en el mercat de drets d'emissió està permès, però el problema de com distribuir els drets disponibles inicialment és molt important. La comunitat acadèmica ha estudiat múltiples i diferents propostes per distribuir aquests drets. Aquí ens remetem al "survey" de Zhou i Wang (2016).

En aquest treball prenem la innovadora perspectiva de Giménez-Gómez et al. (2016) i Duro et al. (2020). Aquests treballs, com el nostre, apliquen un model matemàtic de distribució d'un recurs escàs donades unes demandes en conflicte. La variable fonamental és, doncs, les demandes de drets d'emissió de CO₂ que fan els agents, la suma de les quals és més gran que la quantitat disponible. Tant en aquests treballs com en el nostre, aquestes demandes d'emissions s'assimilen a les projeccions o necessitats d'emissions de CO₂ dels agents.

2.3 Obtenció de les dades

Com que necessitem obtenir les projeccions d'emissions de CO₂ a l'atmosfera ens hem centrat amb les dades ofertes pel IPCC 2014. Entre els treballs inclosos al IPCC 2014 trobem els RCP (Representative Concentration Pathways), en total 4, on s'ofereixen dades sobre les projeccions d'emissions de CO₂ organitzades per regions. En concret les dades es troben estructurades en les 5 regions següents:

1. **OECD** (Western Europe, Northern America and Pacific OECD).
2. **REF** (Eastern Europe).
3. **ASIA** (China and India).

4. **MAF** (Middle East and Africa).
5. **LAM** (Latin American countries).

Hi ha 4 RCPs: el RCP 2.6, RCP 4.5, RCP 6.0, RCP 8.5. Cadascun d'ells estudia 4 possibles escenaris en l'evolució de les emissions de CO₂ (i d'altres contaminants) a l'atmosfera per regions. Duro et al. (2020) consideren els escenaris RCP 4.5 i RCP 6.0. Nosaltres ens centrem, en aquest treball, en l'escenari RCP 8.5 (desenvolupat per Riahi et al. (2007)), que és el més pessimista (les regions emeten més que en cap altre escenari), perquè és un escenari que ningú ha considerat en la literatura.

Si agafem les dades que corresponen al RCP 8.5 (disponibles on-line a la RCP data base, <https://tntcat.iiasa.ac.at/RcpDb/dsd?Action=htmlpage&page=welcome>) veurem que hi ha projeccions d'emissions de CO₂ a l'atmosfera per regions i per els anys 2000, 2005, 2010, 2020, 2030, 2040, 2050 i d'altres. A nosaltres només ens interessen les projeccions fins al 2050 per poder-les combinar amb les dades de CO₂ acumulat en l'atmosfera que farien pujar 2°C la temperatura al 2050 segons Meinshausen et al. (2009).

Amb l'ajuda especial, a qui estem molt agraïts, de Cori Vilella (Universitat Rovira i Virgili), hem tractat les dades disponibles al RCP 8.5. Primer hem calculat les emissions els anys pels que el RCP 8.5 no proporciona dades per interpolació lineal i per regions. A continuació hem sumat les dades de projeccions d'emissions any a any des del 2000 fins al 2050 per regions. Per acabar, com que les dades obtingudes són de projeccions d'emissions de CO₂, i per tant no són comparables amb les de CO₂ acumulat en l'atmosfera que proposa Meinshausen et al. (2009) hem hagut d'aplicar un factor corrector que consisteix en multiplicar les dades d'emissions per 3.67 per obtenir les dades en CO₂ acumulat en l'atmosfera. Aquesta tècnica l'explica i aplica també al treball de Duro et al. (2020)

Després del tractament de les dades obtenim que per el RCP 8.5 les demandes per regions de 2000 a 2050 són, en Gt:

LAM	MAF	REF	OECD	ASIA
181.74	311.50	294.28	826.18	964.02

3. QUAN NO HI HA PROU PER REPARTIR

En aquest capítol introduïm un model matemàtic que ens permetrà analitzar el problema que hem deixat plantejat al capítol anterior: com repartir un recurs escàs entre els diferents agents quan no es poden satisfer totes les seves demandes.

A la literatura moderna, el treball d'O'Neill (1982) és el primer que estudia com distribuir un recurs perfectament divisible i homogeni entre els agents. Va ser el primer en parlar matemàticament sobre aquest problema i es preguntava quins principis i quines regles s'apliquen al Talmud (llibre sagrat del jueus). Una referència ineludible que aprofundeix en l'estudi de regles de repartiment proposades al Talmud és Aumann i Maschler (1985), una contribució del Premi Nobel d'Economia de 2005 Robert J. Aumann.

Molt sovint es parla en aquests treballs de problemes de fallida, on una empresa fa fallida i no té suficient patrimoni (diners) per saldar els seus deutes amb els seus creditors. En el context de la distribució de drets d'emissió de CO₂, el regulador mundial no té prou drets d'emissió per satisfer les demandes (projeccions) d'emissió dels grups de països, o persones.

3.1 Descripció del problema

En concret, els **elements** del problema són:

- **$N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$** és el conjunt d'agents que demanen el recurs.

En el nostre cas poden ser regions (només tenim dades de les regions) però també poden ser països, famílies, persones...).

- **E (Estate)**, és un número real $E \in \mathbb{R}$ estrictament positiu $E > 0$ i representa la quantitat de recurs a distribuir disponible.

En el nostre cas es tracta de les quantitats de CO₂ disponibles a repartir (1440, 1000 o 745 Giga tones, depenent de l'escenari).

- I un vector $c = (c_1, \dots, c_i, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, on $c_i > 0$ és la demanda que fa l'agent $i \in N$.

En el nostre cas tenim dades de la demanda (projeccions d'emissions) que fa cada regió. Tot i que es podrien tenir en consideració les demandes que fa cada país o cada família, no disposem de les dades necessàries.

A més a més, imposarem que $E < \sum_{i \in N} c_i$. En cas contrari la solució és evident, tothom rep la seva demana c_i . Notarem, doncs, un problema de repartiment amb una tripleta (N, E, c) .

En la literatura s'han proposat diverses formes de repartiment, o solucions, a problemes d'aquest tipus. Una solució és una funció, S , que assigna a cada problema (N, E, c) un vector $S(N, E, c) \in \mathbb{R}^n$, on $S_i(N, E, c)$, la component i -èsima del vector, és el que rep l'agent $i \in N$, d'acord amb la solució S , amb dues condicions ineludibles:

- **Eficiència o Optimitat de Pareto:** $\sum_{i \in N} S_i(N, E, c) = E$. Es reparteix exactament la quantitat disponible.
- **Acotació per demanda:** $c_i \geq S_i(N, E, c) \geq 0$. Cap agent rep més que la seva demanda, ni menys que zero.

El llibre de referència, que aporta una visió global d'aquests problemes de distribució, així com de les possibles solucions i les seves propietats és "How to divide when there isn't enough. From Aristotle, the Talmud, and Maimonides to the Axiomatics of Resource Allocation" de William Thomson, publicat al 2019.

En el context de la necessitat de reduir les emissions permeses de CO₂ i de les negociacions entre països o regions en diferents fòrums com la UE, o les reunions pel clima, la comunitat acadèmica ha prestat, recentment, atenció en aquests estudis matemàtics per tal de proposar mecanismes "racional" d'assignació d'un recurs escàs. Els treballs de Giménez-Gómez et al. (2016) i Duro et al. (2020) aporten una perspectiva al problema, utilitzant el model presentat i són els que hem estudiat en profunditat.

3.2 Principals propostes de repartiment

Les propostes de repartiment o solucions utilitzades i analitzades en la literatura obeeixen a dos principis fonamentals: el de proporcionalitat i el d'igualitarisme. El principi de proporcionalitat ja és proposat per Aristòtil en els seus treballs sobre justícia distributiva. Una cita seva és "el que és just en aquest sentit, aleshores, és el que és proporcional, i el que és injust és el que viola la proporció" (Ethics, book V, pp 177-179). Aquest principi, en el nostre context dona lloc a la distribució proporcional a les demandes.

El principi d'igualitarisme s'introdueix per primer cop per Maimonides, un líder rabí de l'edat mitjana, on argumenta que el recurs hauria de ser dividit igualitàriament. Aquest principi, en el nostre context dona lloc a tres propostes de distribució diferent: la Constrained Equal Awards, que distribueix guanys igualitàriament; la Constrained Equal Losses, que distribueix pèrdues igualitàriament; i la Talmud (extreta per Aumann i Maschler (1985) a l'interpretar alguns passatges del Talmud), que és una combinació de les dues primeres.

En el "paper" de Duro et al. (2020) es faciliten els càlculs d'aquestes propostes de repartiment dels drets d'emissions per a les projeccions d'emissions, o demandes per regions, en els escenaris RCP 4.5 i RCP 6.0. Es tenen en compte les diferents

quantitats de Gt de CO₂ acumulades en l'atmosfera que provocarien un augment de 2°C en la temperatura, especificades per Meinshausen et al. (2009).

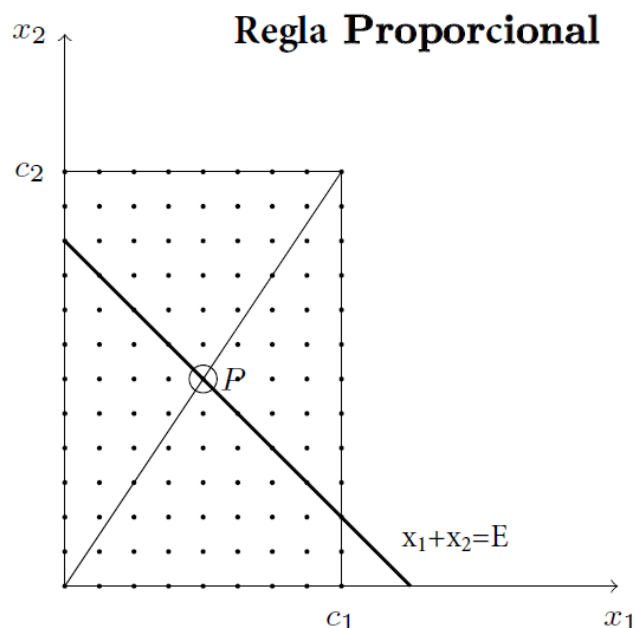
La primera contribució d'aquest treball, és el càlcul de la regla proporcional, la constrained equal awards, la constrained equal losses i la regla del Talmud per les demandes corresponents a l'escenari RCP 8.5. Considerarem els tres casos descrits per Meinshausen (2009). Descriurem amb detall els càlculs quan es distribueixen fins a 1440 Gt de CO₂ acumulades en l'atmosfera, que provocarien un augment de 2°C de la temperatura mitjana de la Terra amb una probabilitat del 50% (Taula 1). Més endavant, a la Taula 2, es faciliten els càlculs de les regles proposades quan les Gt de CO₂ a distribuir siguin 1000 (un augment de 2°C ocorre amb una probabilitat del 25%) i a la Taula 3 quan siguin 745 Gt, on la temperatura no augmentaria més de 2°C en cap cas.

3.2.1 Proporcionalitat

El principi de Proporcionalitat és una de les formes de repartiment més antigues en la literatura de problemes de distribució. Bàsicament, s'assumeix que cada agent ha de ser retribuït en proporció a les seves demandes (aportacions, contribucions,...). Per a tota $i \in N$ i donat un problema (N, E, c) , l'expressió matemàtica de la solució proporcional a les demandes (P) és:

$$P_i(N, E, c) = \frac{c_i}{\sum_{i \in N} c_i} \cdot E.$$

Per tal de donar una explicació intuïtiva de la regla proporcional, a continuació explicarem gràficament el seu comportament quan només hi ha 2 agents, amb demandes (c_1, c_2) i $c_2 > c_1$.



En el gràfic, l'àrea puntejada suposa el conjunt de distribucions que compleixen **acotació per demanda**. En l'extrem inferior esquerre hi ha l'origen, o distribució (0, 0) i en l'extrem superior dreta el punt en que cada agent rep la seva demanda (c_1, c_2). Per a un E donada tal que $c_1 + c_2 > E$, el conjunt de distribucions eficients són els punts sobre la recta $x_1 + x_2 = E$. Aleshores, una solució ha de seleccionar un punt sobre aquesta recta dins de l'àrea puntejada. La solució proporcional selecciona aquell punt que interseca amb el segment que uneix l'origen amb (c_1, c_2). Si ara volem estudiar el comportament de la solució proporcional si només variem la E o els recursos disponibles, observem que selecciona sempre el punt (x_1, x_2) sobre el segment que uneix (0, 0) amb (c_1, c_2) que compleix $x_1 + x_2 = E$. Per tant, aquest segment il·lustra gràficament la funció $P(N, E, c)$ quan només canviem la E .

Amb les dades de l'escenari RCP 8.5 i si s'han de distribuir 1440 Gt els elements del problema de distribució són:

- $N = \{\text{LAM, REF, MAF, OECD, ASIA}\}$
- $E = 1440$
- $c = (c_{\text{LAM}}, c_{\text{REF}}, c_{\text{MAF}}, c_{\text{OECD}}, c_{\text{ASIA}}) = (181.74, 294.28, 311.50, 826.18, 964.02)$

Fent servir la regla proporcional, veurem quant li correspon a cada regió.

$$P_{\text{LAM}}(N, E, c) = \frac{181.74}{181.74+294.28+311.50+826.18+964.02} \cdot 1440 = \frac{181.74}{2577.72} \cdot 1440 = \mathbf{101.526}$$

$$P_{\text{REF}}(N, E, c) = \frac{294.28}{2577.72} \cdot 1440 = \mathbf{164.3946}$$

$$P_{\text{MAF}}(N, E, c) = \frac{311.50}{2577.72} \cdot 1440 = \mathbf{174.0142}$$

$$P_{\text{OECD}}(N, E, c) = \frac{826.18}{2577.72} \cdot 1440 = \mathbf{461.5316}$$

$$P_{\text{ASIA}}(N, E, c) = \frac{964.02}{2577.72} \cdot 1440 = \mathbf{538.5336}$$

A les Taules 1, 2 i 3 presentem els càlculs de la P per a $E = 1440$, $E = 1000$ i $E = 745$, respectivament.

3.2.2 Constrained Equal Awards

La Constrained Equal Awards és una solució basada en l'igualitarisme. En particular, proposa una distribució igualitària en guanys. Pel contrari, no té en compte les diferències entre els agents en termes de pèrdues respecte de les seves demandes.

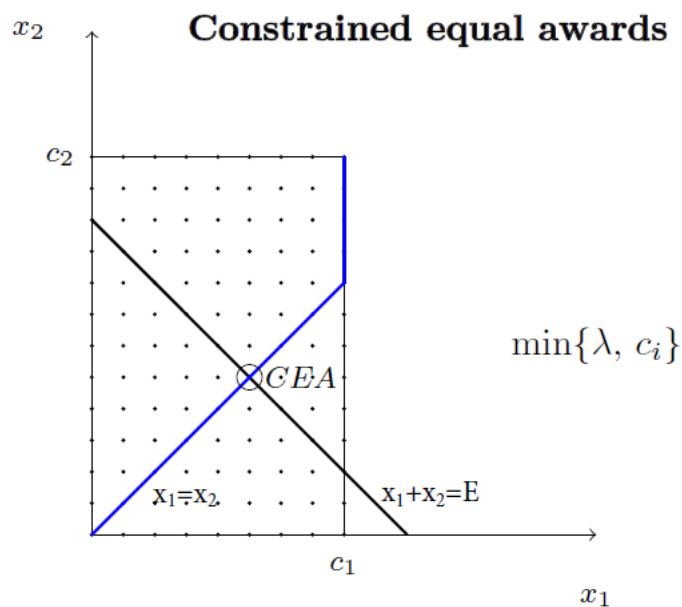
La idea és que tots els agents rebin la mateixa quantitat de recursos, sempre i quan aquesta quantitat no superi la seva demanda. Per tant, consisteix en trobar el valor λ

tal que el que rep cada agent és la quantitat mínima entre la seva demanda c_i i els guanys λ .

Per a tot $i \in N$, i donat un problema (N, E, c) , l'expressió matemàtica de la solució Constrained Equal Awards (CEA) és:

$$CEA_i(N, E, c) = \min\{\lambda, c_i\}, \text{ on } \lambda \text{ es determina per tal que } \sum_{i \in N} CEA_i(N, E, c) = E.$$

Per tal de descriure intuïtivament el seu comportament representem gràficament el cas de dos agents amb $c_2 > c_1$.



La CEA selecciona aquell punt de la recta $x_1 + x_2 = E$ que interseca amb la recta $x_1 = x_2$, sempre que això sigui possible, és a dir, sempre que aquest punt caigui dins de l'àrea puntejada i per tant ningú rebi més que la seva demanda. En el cas que la intersecció entre les rectes $x_1 + x_2 = E$ i $x_1 = x_2$ caigui fora de l'àrea puntejada, la CEA agafa el punt sobre la recta $x_1 + x_2 = E$ més proper en aquest punt no factible. En altres paraules, la CEA restringeix el pagament als agents a com a màxim la seva demanda. La recta en blau il·lustra gràficament el comportament de la funció $CEA(N, E, c)$ quan només canviem la E .

Fent servir les dades del RCP 8.5 i si s'han de distribuir 1440 Gt, per calcular la CEA s'ha de seguir un algorisme que en el nostre cas segueix els següents passos:

1. Dividim $\frac{E}{n}$

$$\frac{1440}{5} = 288 \text{ Gt}$$

En el cas que $c_i \geq \frac{E}{n}$ per a tot $i \in N$, hauríem acabat i $CEA_i(N, E, c) = \frac{E}{n}$ per a tot $i \in N$. Si no passem al 2.

2. Tots aquells agents tals que $c_i < 288$ reben exactament c_i .

Per a LAM $c_i = 181.74 < 288$, i per tant

$$CEA_{LAM}(N, E, c) = \mathbf{181.74}$$

Els agents on $c_i < \frac{E}{n}$ reben c_i i se'n van

3. Queden els agents REF, MAF, OECD i ASIA.

Definim un nou problema de repartiment (N', E', c') on:

- $N' = \{REF, MAF, OECD, ASIA\}$
- $E' = E - CEA_{LAM}(N, E, c) = 1440 - 181.74 = 1258.26$
- $c'_i = c_i$ per a tot $i \in N'$

I tornem a aplicar els mateixos passos que al començament.

4. Dividim a parts iguals E' entre els agents restants.

$$\frac{E'}{n'} = \frac{1258.26}{4} = 314.565$$

5. Els agents on $c_i < 314.565$ reben c_i i se'n van.

- Per a REF i MAF $c_i < 314.565$, i per tant

$$CEA_{REF}(N, E, c) = \mathbf{294.28}$$

$$CEA_{MAF}(N, E, c) = \mathbf{311.50}$$

6. Queden els agents OECD i ASIA.

Definim un nou problema (N'', E'', c'') on:

- $N'' = \{OECD, ASIA\}$
- $E'' = E' - CEA_{REF}(N', E', c') - CEA_{MAF}(N', E', c') = 652.48$
- $c''_i = c'_i = c_i$ per a tot $i \in N''$

7. Dividim E'' entre els agents que queden

$$\frac{E''}{n''} = \frac{652.48}{2} = 326.24$$

8. En aquest cas $c_i > 326.24$ per a tot $i \in N''$ i per tant l'algorisme acaba i

$$CEA_{OECD}(N, E, c) = CEA_{ASIA}(N, E, c) = \mathbf{326.24}.$$

Concloem doncs que $CEA(N, E, c) = (181.74, 294.28, 311.50, 326.24, 326.24)$ i observem que en aquest cas $\lambda = 326.24$.

Els agents reben aquelles quantitats de drets tan iguals com és possible, sense superar les demandes.

En les Taules 1, 2 i 3 es presenten els càlculs de la CEA per a $E = 1440$, $E = 1000$ i $E = 745$, respectivament.

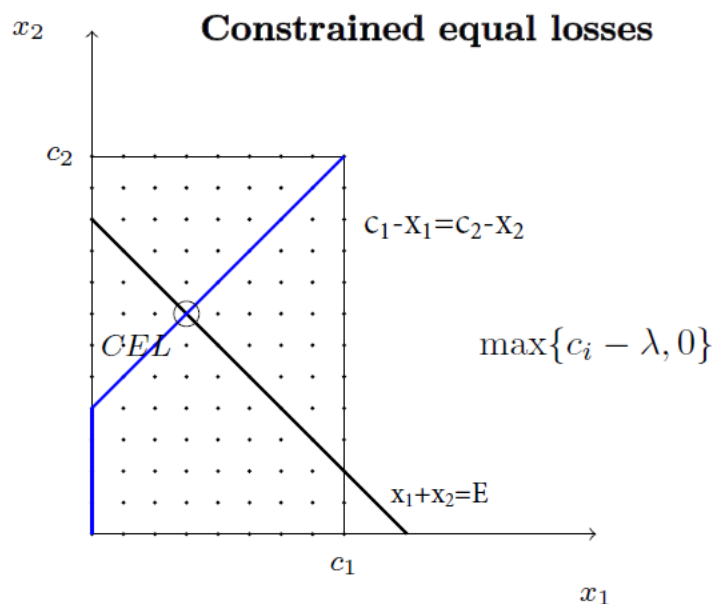
3.2.3 Constrained Equal Losses

La Constrained Equal Losses, al contrari que la CEA, proposa una distribució igualitària en pèrdues. Per tant, no té en compte les diferències entre els agents en termes de guanys. La idea consisteix en trobar el valor λ per tal que les pèrdues siguin les mateixes per a tots els agents. El que rep cada agent és la diferència entre la seva demanda c_i i les pèrdues λ . Una cosa molt important és que ningú pot emetre una quantitat negativa, és a dir, si algú fa una demanda no pot ser que li surti a pagar. És per això que el que li correspon a cada agent és el màxim entre el 0 i la demanda menys la pèrdua.

Per a tot $i \in N$, i donat un problema (N, E, c) , l'expressió matemàtica de la solució CEL és:

$$CEL_i(N, E, c) = \max\{c_i - \lambda, 0\} \text{ on } \lambda \text{ es determina per tal que } \sum_{i \in N} CEL_i(N, E, c) = E.$$

Representem el cas de dos agents amb $c_2 > c_1$ a continuació.



La CEL selecciona aquell punt de la recta $x_1 + x_2 = E$ que interseca amb la recta de igual pèrdues $c_1 - x_1 = c_2 - x_2$, sempre que sigui possible, és a dir, que el punt caigui dins de l'àrea puntejada, i per tant, ningú rebí menys que zero. Si $x_1 + x_2 = E$ i $c_1 - x_1 = c_2 - x_2$ intersequen fora de l'àrea puntejada, la CEL agafa el punt sobre la recta $x_1 + x_2 = E$ més proper en aquest punt no factible. En altres paraules, la CEL impossibilita pagaments negatius. La recta en blau ensenya el comportament de la funció $CEL(N, E, c)$ quan només varia la E .

Fent servir les dades del RCP 8.5 i si s'han de repartir 1440 Gt, estudiem la proposta que fa la CEL. Per a calcular la CEL s'ha de seguir un algorisme, que en el nostres cas segueix els següents passos:

1. Calculem la pèrdua total: $\sum_{i \in N} c_i - E = 1137.72$. I a continuació dividim $\frac{\text{pèrdua total}}{n} = \frac{1137.72}{5} = 227.54$

2. Calculem en quant es queda el pagament a cada agent si suporta la pèrdua $\frac{\text{pèrdua total}}{n}$.

$$c_{LAM} - 227.54 = 181.74 - 227.54 = -45.8 < 0$$

$$c_{REF} - 227.54 = 294.28 - 227.54 = 66.74 > 0$$

$$c_{MAF} - 227.54 = 311.50 - 227.54 = 83.96 > 0$$

$$c_{OECD} - 227.54 = 826.18 - 227.54 = 598.64 > 0$$

$$c_{ASIA} - 227.54 = 964.02 - 227.54 = 736.48 > 0$$

En el cas que $c_i - \frac{\text{pèrdua total}}{n} > 0$ per a tot $i \in N$, hauríem acabat i $CEL_i(N, E, c) = c_i - \frac{\text{pèrdua total}}{n}$ per a tot $i \in N$. Si no passem al 3.

3. Si $c_i - 227.54 < 0$ aquell agent rep 0. Per a LAM, obtenim

$$CEL_{LAM}(N, E, c) = \mathbf{0}$$

Els agents on $c_i - \frac{\text{pèrdua total}}{n} < 0$, reben 0 i se'n van.

4. Construïm un altre problema de repartiment (N', E', c') sense LAM, on:

- $N' = \{REF, MAF, OECD, ASIA\}$
- $E' = E$
- $c'_i = c_i$ per a tot $i \in N'$.

5. Calculem la pèrdua total $\sum_{i \in N'} c'_i - E' = 2395.98 - 1440 = 955.98$ i dividim entre el nombre d'agents que resten $\frac{\text{pèrdua total}}{n'} = \frac{955.98}{4} = 238.995$.

6. Calculem en quant es queda el pagament a cada agent si suporta aquesta pèrdua:

$$c_{REF} - 238.995 = 294.28 - 238.995 = 55.285 > 0$$

$$c_{MAF} - 238.995 = 311.50 - 238.995 = 72.505 > 0$$

$$c_{OECD} - 238.995 = 826.18 - 238.995 = 587.185 > 0$$

$$c_{ASIA} - 238.995 = 964.02 - 238.995 = 725.025 > 0$$

Com que totes les diferències són positives hem acabat.

Per tant:

$$CEL_{REF}(N, E, c) = \mathbf{55.285}$$

$$CEL_{MAF}(N, E, c) = \mathbf{72.505}$$

$$CEL_{OECD}(N, E, c) = \mathbf{587.185}$$

$$CEL_{ASIA}(N, E, c) = \mathbf{725.025}$$

Concloem, doncs, que $CEL(N, E, c) = (0, 55.285, 72.505, 587.185, 725.025)$ i observem que en aquest cas $\lambda = 238.995$. Els agents reben aquelles quantitats de drets tals que les pèrdues són tan iguals com és possible, sense que ningú rebi per sota de 0.

En les Taules 1, 2 i 3 es presenten els càlculs de la CEL per a $E = 1440$, $E = 1000$ i $E = 745$, respectivament.

3.2.4 Talmud

La solució del Talmud proposada per primer cop a Aumann i Maschler (1985) està inspirada en les propostes de repartiment que es troben al llibre del Talmud jueu. Aquesta solució mira de combinar les dues visions diferents de l'igualitarisme: en guanys i en pèrdues.

Per a tot $i \in N$ i donat un problema (N, E, c) , l'expressió matemàtica de la regla del Talmud (T) depèn de si la quantitat de recurs a repartir, E , és "gran" o "petita".

$$\text{Si } E \leq \frac{\sum_{i \in N} c_i}{2} \text{ aleshores } T_i(N, E, c) = CEA_i\left(N, E, \frac{c}{2}\right).$$

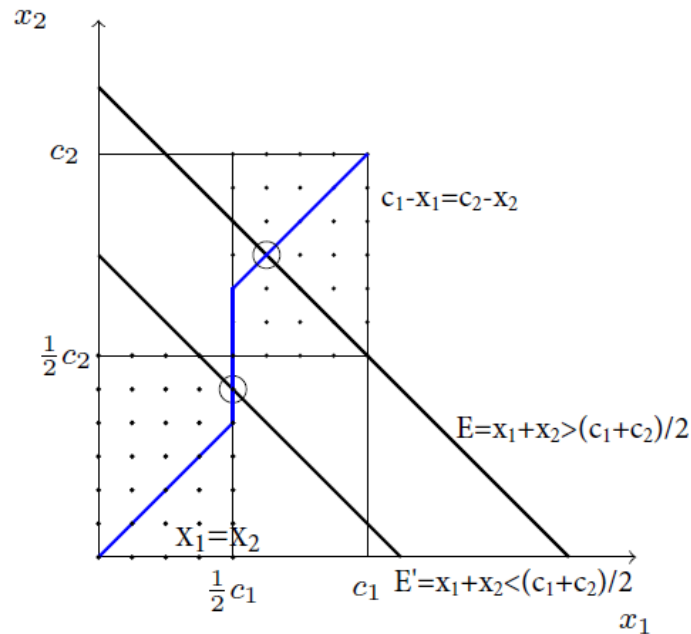
Com que la E és "petita" s'entén que obtenir com a màxim la meitat del que es demana és acceptable pels agents. Per això, en aquest cas la regla del Talmud segueix la pauta de la CEA, amb la restricció que els agents no poden demanar més que la meitat de la seva demanda.

$$\text{Si } E \geq \frac{\sum_{i \in N} c_i}{2} \text{ aleshores } T_i(N, E, c) = \frac{c_i}{2} + CEL_i\left(N, E - \frac{\sum_{i \in N} c_i}{2}, \frac{c_i}{2}\right).$$

En canvi, si la E és "gran", la Talmud assigna als agents com a mínim la meitat de la seva demanda. Un cop tothom ha sigut remunerat amb la meitat de la seva demanda, la resta s'assigna igualant pèrdues. Per això, en aquest cas la regla del Talmud segueix la pauta de la CEL, un cop tothom ha rebut la meitat del que demana.

La gràfica següent il·lustra el cas de dos agents amb $c_2 > c_1$.

Talmudic



Per a E “petites”, menors que $\frac{\sum_{i \in N} c_i}{2}$, busquem el punt mig de la zona puntejada $(\frac{c_1}{2}, \frac{c_2}{2})$ i apliquem la CEA amb aquestes noves demandes.

Per a E “grans”, majors que $\frac{\sum_{i \in N} c_i}{2}$ tothom rep $(\frac{c_1}{2}, \frac{c_2}{2})$ i a partir d'aquí, repartim el que queda aplicant la CEL.

Estudiem a continuació la proposta de la regla del Talmud fent servir les dades del RCP 8.5 quan repartim 1440 Gt. Calcularem la distribució segons aquesta regla amb els passos següents:

1. Comprovem en quin dels dos casos ens trobem. Com que

$$E = 1440 > 1288.86 = \frac{2577.72}{2} = \frac{\sum_{i \in N} c_i}{2},$$

farem servir les pautes de la CEL.

2. Cada regió rep primer la meitat de la seva demanda $(\frac{c_i}{2})$:

$$\frac{c_{LAM}}{2} = \frac{181.74}{2} = 90.87$$

$$\frac{c_{REF}}{2} = 147.14$$

$$\frac{c_{MAF}}{2} = 155.75$$

$$\frac{c_{OECD}}{2} = 413.09$$

$$\frac{c_{ASIA}}{2} = 482.01$$

3. Definim un nou problema (N', E', c') per repartir el que encara queda d'acord amb la CEL. En aquest nou problema el conjunt d'agents és el mateix que anteriorment.

- $E' = 1440 - 1288.86 = 151.14$ és el que encara queda per repartir.
- $c'_i = \frac{c_i}{2}$ són les demandes que encara queden per satisfer.

4. Busquem $CEL(N', E', c')$.

4.1 Calculem la pèrdua total.

$$\sum_{i \in N} c'_i - E' = 1288.86 - 151.14 = 1137.72$$

$$\text{I dividim } \frac{\text{pèrdua total}}{n'} = \frac{1137.72}{5} = 227.544$$

4.2 Observem que:

$$c'_{LAM} - 227.544 < 0$$

$$c'_{REF} - 227.544 < 0$$

$$c'_{MAF} - 227.544 < 0$$

4.3 Per tant $CEL_{LAM}(N', E', C') = CEL_{REF}(N', E', C') = CEL_{MAF}(N', E', C') = 0$

4.4 Construïm un nou problema (N'', E'', c'') on:

- $N'' = \{OECD, ASIA\}$
- $E'' = E'$
- $c''_i = c'_i$ per a tot $i \in N$

4.5 Calculem la pèrdua total que és igual a $482.01 + 413.09 - 151.14 = 743.96$ i dividim $\frac{743.96}{2} = 371.98$.

4.6 Com que $c''_{OECD} - 371.98 = 41.11 > 0$ i $c''_{ASIA} - 371.98 = 110.03 > 0$ hem acabat.

Concloem que $CEL(N', E', c') = (0, 0, 0, 41.11, 110.03)$ i per tant la Talmud del problema inicial és:

- $T_{LAM}(N, E, c) = \mathbf{90.87}$
- $T_{REF}(N, E, c) = \mathbf{147.14}$
- $T_{MAF}(N, E, c) = \mathbf{155.75}$
- $T_{OECD}(N, E, c) = 413.09 + 41.11 = \mathbf{454.2}$
- $T_{ASIA}(N, E, c) = 482.01 + 110.03 = \mathbf{592.04}$

A continuació, a la Taula 1 resumim els resultats que hem obtingut amb detall per a l'escenari de demandes RCP 8.5 i amb $E = 1440$ (50% de probabilitats d'augment de 2°C en la temperatura de la Terra).

Taula 1: escenari RCP 8.5 amb $E = 1440$ Gt

	C	P	CEA	CEL	T
LAM	181.74	101.53	181.74	0	90.87
MAF	294.28	164.39	294.28	55.28	147.14
REF	311.50	174.01	311.50	72.50	155.75
OECD	826.18	461.53	326.24	587.18	454.2
ASIA	964.02	538.53	326.24	725.02	592.04

En les Taules 2 i 3 mostrem els resultats per a l'escenari de demandes RCP 8.5 amb $E = 1000$ (25% de probabilitats) i $E = 745$ (0% de probabilitats), respectivament.

Taula 2: escenari RCP 8.5 amb $E = 1000$ Gt

	C	P	CEA	CEL	T
LAM	181.74	70.50	181.74	0	90.87
MAF	294.28	114.16	204.57	0	147.14
REF	311.50	120.84	204.57	0	155.75
OECD	826.18	320.51	204.57	431.08	303.12
ASIA	964.02	373.98	204.57	568.92	303.12

Taula 3: escenari RCP 8.5 amb $E = 745$ Gt

	C	P	CEA	CEL	T
LAM	181.74	52.53	149	0	90.87
MAF	294.28	85.05	149	0	147.14
REF	311.50	90.03	149	0	155.75
OECD	826.18	238.78	149	303.58	175.62
ASIA	964.02	278.62	149	441.42	175.62

4. NO MANIPULABILITAT. PENSANT EN TERMES INDIVIDUALS

Els treballs de Duro et al. (2020) i Giménez-Gómez et al. (2016) posen l'atenció en regles que obeeixen principis d'igualitarisme. Concretament, Giménez et al. (2016) defensen la regla del Talmud, mentre que Duro et al. (2020) aposten més per la CEA (i variants).

En aquest capítol, que constitueix la segona, i més important, aportació d'aquest treball, la intenció és aportar un punt de vista en el qual es tingui en compte la població de les diferents regions a l'hora de repartir, cosa que els treballs esmentats anteriorment no tenen en compte.

4.1 Un nou conjunt d'agents: les persones

Per dur a terme aquest capítol hem obtingut la població de les regions (país a país) amb les dades proporcionades pel grup de gestió de dades sobre el desenvolupament del Banc Mundial (<https://data.worldbank.org/indicador/SP.POP.TOTL>). Per a que l'anàlisi tingui en compte la població suposarem que els agents involucrats en el problema de distribució **NO** són les regions o els països sinó els seus habitants. Per això definim un nou problema en el qual el conjunt de demandants és el conjunt de la població mundial, 7 450 130 207 habitants. A cadascun d'ells se'ls assigna una demanda individual, que s'obté de dividir la demanda total de la regió a parts iguals entre els seus habitants. Per evitar resultats amb molts decimals tant les demandes com la quantitat de recurs a repartir expressades en Gt les hem passat a kilotones (kt). Òbviament la quantitat total a repartir entre la població mundial és la mateixa que hem considerat fins ara.

En concret, el nou problema amb les noves especificacions és com segueix:

- Consultant les dades del RCP Database (https://tntcat.iiasa.ac.at/RcpDb/dsd?Action=htmlpage&page=welcome#region_defs) es poden obtenir els llistats de països corresponent a cada una de les 5 regions definides. Hem trobat amb aquest llistat i les dades de població per països de Banc Mundial, els habitants en cada una de les regions. Respecte dels agents involucrats en el nou problema:
 - N_{LAM} és el conjunt dels habitants de LAM. Hi ha 645 221 323 agents a N_{LAM} .
 - N_{MAF} és el conjunt dels habitants de MAF. Hi ha 1 549 686 628 agents a N_{MAF} .
 - N_{REF} és el conjunt dels habitants de REF. Hi ha 399 859 028 agents a N_{REF} .

- N_{OECD} és el conjunt dels habitants de OECD. Hi ha 873 809 080 agents a N_{OECD} .
- N_{ASIA} és el conjunt dels habitants de ASIA. Hi ha 3 981 554 148 agents a N_{ASIA} .

Aleshores, podem dir que el conjunt total d'agents es defineix $N = N_{LAM} \cup N_{REF} \cup N_{MAF} \cup N_{OECD} \cup N_{ASIA}$ i conté 7 450 130 207 agents.

- Respecte de la quantitat de recurs a repartir. Detallarem els càlculs per a $E = 1440000000 \text{ Kt}$

- Respecte de les demandes dels agents:

$$\rightarrow c_i = \frac{\text{Demanda total LAM}}{\text{Habitants LAM}} = \frac{181\,740\,000 \text{ Kt}}{645\,221\,323} = 0.28167079 \text{ Kt} \quad \forall i \in N_{LAM}$$

$$\rightarrow c_i = \frac{\text{Demanda total MAF}}{\text{Habitants MAF}} = \frac{294\,280\,000 \text{ Kt}}{1\,549\,686\,628} = 0.189896457 \text{ Kt} \quad \forall i \in N_{MAF}$$

$$\rightarrow c_i = \frac{\text{Demanda total REF}}{\text{Habitants REF}} = \frac{311\,500\,000 \text{ Kt}}{399\,859\,028} = 0.779024552 \text{ Kt} \quad \forall i \in N_{REF}$$

$$\rightarrow c_i = \frac{\text{Demanda total OECD}}{\text{Habitants OECD}} = \frac{826\,180\,000 \text{ Kt}}{873\,809\,080} = 0.945492578 \text{ Kt} \quad \forall i \in N_{OECD}$$

$$\rightarrow c_i = \frac{\text{Demanda total ASIA}}{\text{Habitants ASIA}} = \frac{964\,020\,000 \text{ Kt}}{3\,981\,554\,148} = 0.242121534 \text{ Kt} \quad \forall i \in N_{ASIA}$$

A continuació, ens proposem tornar a fer els càlculs i obtenir la CEA, CEL, Talmud i la Proporcional per aquest nou problema de repartiment. Per dur a terme aquests càlculs és important saber que aquestes quatre regles compleixen una propietat anomenada **tractament igualitari dels iguals**, que simplement implica que si dos agents fan les mateixes demandes els dos han de rebre la mateixa quantitat de recurs.

Formalment, una solució, S , compleix el **tractament igualitari dels iguals** quan, per a un problema (N, E, c) on $c_i = c_j$ per algun parell d'agents $i, j \in N$, aleshores $S_i(N, E, c) = S_j(N, E, c)$.

Aquesta observació facilitarà molt els càlculs, ja que tots els habitants d'una regió rebran la mateixa quantitat de drets d'emissió. La idea és comparar com canvia la distribució dels drets entre regions si el repartiment es fa de manera descentralitzada, directament a les persones que emetem CO₂. Per tant hem de tenir en compte la població. Suposarem, però, que tots els habitants de cada regió emeten per igual, tenen la mateixa demanda.

4.2 Proporcionalitat

Havent plantejat el nou problema procedim a calcular primer la regla proporcional.

- Per a tot $i \in N_{LAM}$
$$P_i(N, E, c) = \frac{c_i}{\sum_{i \in N} c_i} \cdot E = \frac{0.28167079}{2\,577\,720\,000} \cdot 1\,440\,000\,000 = \mathbf{0.1573506578}$$
- Per a tot $i \in N_{MAF}$
$$P_i(N, E, c) = \frac{0.189896457}{2\,577\,720\,000} \cdot 1\,440\,000\,000 = \mathbf{0.1060824675}$$
- Per a tot $i \in N_{REF}$
$$P_i(N, E, c) = \frac{0.779024552}{2\,577\,720\,000} \cdot 1\,440\,000\,000 = \mathbf{0.4351889867}$$
- Per a tot $i \in N_{OECD}$
$$P_i(N, E, c) = \frac{0.945492578}{2\,577\,720\,000} \cdot 1\,440\,000\,000 = \mathbf{0.5281835546}$$
- Per a tot $i \in N_{ASIA}$
$$P_i(N, E, c) = \frac{0.242121534}{2\,577\,720\,000} \cdot 1\,440\,000\,000 = \mathbf{0.1352571299}$$

D'acord amb aquests càlculs, si ara volem saber quina quantitat d'emissions li correspon a cada regió:

- LAM rebria $0.1573506578 \cdot \text{població total LAM} = 0.1573506578 \cdot 645\,221\,323 = \mathbf{101\,525\,999.6}$.
- MAF rebria $0.1060824675 \cdot 1\,549\,686\,628 = \mathbf{164\,394\,581.4}$
- REF rebria $0.4351889867 \cdot 399\,859\,028 = \mathbf{17\,014\,245.2}$
- OECD rebria $0.5281835546 \cdot 873\,809\,080 = \mathbf{461\,531\,585.9}$
- ASIA rebria $0.1352571299 \cdot 3\,981\,554\,148 = \mathbf{538\,533\,586.6}$

És important comprovar que els resultats obtinguts amb la regla proporcional són els mateixos que en el primer model (veure Taula 1) amb 5 regions.

4.3 Constrained Equal Awards

També amb el nou problema procedim a calcular la CEA, tot i que de forma més simplificada.

1. Dividim $\frac{E}{n}$
$$\frac{1\,440\,000\,000}{7\,450\,130\,207} = 0.1932852$$

2. Tots aquells agents tals que $c_i < 0.1932852$ reben exactament c_i .

Per a tot $i \in N_{MAF}$, $c_i = 0.189896457 < 0.1932852$. Com que tots els habitants de MAF fan la mateixa demanda, tots reben la mateixa quantitat $CEA_i(N, E, c) =$

0.1896457. Aleshores, per a MAF el total seria $0.189896457 \cdot 1\,549\,686\,628 =$
294 280 000

3. Definim un nou problema (N', E', c') un cop tots els habitants de MAF han sigut retribuïts la seva demanda. Ara el conjunt d'habitants és N' , que en total són 5 900 443 579 habitants.

La nova quantitat total a repartir $E' = 1\,440\,000\,000 - 294\,280\,000 =$
1 145 720 000.

I finalment $c'_i = c_i$ per a tot $i \in N'$

4. Dividim $\frac{E'}{n'}$
 $\frac{1\,145\,720\,000}{5\,900\,443\,579} = 0.194175232$

5. Totes les demandes per a tot $i \in N'$ compleixen que $c_i > 0.194175232$. Per tant, per a tot $i \in N'$, $CEA_i(N', E', c') = 0.194175232$

D'acord amb aquests càlculs, si ara volem saber quina quota d'emissions li correspon a cada regió:

→ LAM rebria $0.194175232 \cdot 645\,221\,323 =$ **125 286 000.1**

→ MAF, com hem vist abans, rebria **294 280 000**

→ REF rebria $0.194175232 \cdot 399\,859\,028 =$ **77 642 719.53**

→ OECD rebria $0.194175232 \cdot 873\,809\,080 =$ **169 672 080.8**

→ ASIA rebria $0.194175232 \cdot 3\,981\,554\,148 =$ **773 119 200.4**

És molt important observar que a l'aplicar la CEA i tenir en compte la població afavoreix regions més poblades, regions com ASIA, que surten guanyant respecte del problema inicial amb 5 regions.

Val a dir, que aleshores el concepte d'igualitarisme depèn d'una forma molt profunda de com definim el conjunt d'agents del problema.

4.4 Constrained Equal Losses

A continuació calculem la CEL del nou problema.

1. Calculem la pèrdua total, que és la mateixa que en el problema per regions, 1 137 720 000, i la dividim entre la població total $\frac{1\,137\,720\,000}{7\,450\,130\,207} = 0.152711425$.

2. Obtenim que:

Per a tot $i \in N_{LAM}$ $c_i - 0.152711425 = 0.28167079 - 0.152711425 = 0.128959365 > 0$.

Per a tot $i \in N_{MAF}$ $c_i - 0.152711425 = 0.189896457 - 0.152711425 = 0.037185032 > 0$.

Per a tot $i \in N_{REF}$ $c_i - 0.152711425 = 0.779024552 - 0.152711425 = 0.626313127 > 0$.

Per a tot $i \in N_{OECD}$ $c_i - 0.152711425 = 0.945492578 - 0.152711425 = 0.792781153 > 0$.

Per a tot $i \in N_{ASIA}$ $c_i - 0.152711425 = 0.242121534 - 0.152711425 = 0.089410109 > 0$.

Com que totes les diferències són positives concloem que:

- Per a tot $i \in N_{LAM}$ $CEL_i(N, E, c) = 0.128959365$
- Per a tot $i \in N_{MAF}$ $CEL_i(N, E, c) = 0.037185032$
- Per a tot $i \in N_{REF}$ $CEL_i(N, E, c) = 0.626313127$
- Per a tot $i \in N_{OECD}$ $CEL_i(N, E, c) = 0.792781153$
- Per a tot $i \in N_{ASIA}$ $CEL_i(N, E, c) = 0.089410109$

D'acord amb aquests càlculs, si ara volem saber quina quota d'emissions li correspon a cada regió:

- LAM rebria $0.128959365 \cdot 645\,221\,323 = \mathbf{83\,207\,332.1}$
- MAF rebria $0.037185032 \cdot 1\,549\,686\,628 = \mathbf{57\,625\,146.85}$
- REF rebria $0.626313127 \cdot 399\,859\,028 = \mathbf{250\,436\,958.2}$
- OECD rebria $0.792781153 \cdot 873\,809\,080 = \mathbf{692\,739\,369}$
- ASIA rebria $0.089410109 \cdot 3\,981\,554\,148 = \mathbf{355\,991\,190.4}$

De nou, les quotes obtingudes en el capítol 2 per regions, difereixen de les obtingudes aquí. Val a dir que mentre que el problema inicial la CEL iguala les pèrdues per regions, ara iguala pèrdues per càpita.

Observem un altre cop que el concepte d'igualitarisme depèn de com definim el conjunt d'agents del problema.

4.5 Talmud

Per acabar calculem la T del nou problema

1. Comprovem que $E > \frac{\sum_{i \in N} c_i}{2}$:

$$1\,440\,000\,000 > \frac{2\,577\,720\,000}{2} = 1\,288\,860\,000$$

Aleshores, farem servir les pautes de la CEL.

2. Cada habitant rep primer la meitat de la seva demanda.

$$E' = E - \frac{C(N)}{2} = 1\,440\,000\,000 - 1\,288\,860\,000 = 151\,140\,000$$

- $\frac{c_i}{2} = \frac{0.28167079}{2} = 0.140835395$ per tot $i \in N_{LAM}$
- $\frac{c_i}{2} = \frac{0.189896457}{2} = 0.0949482285$ per a tot $i \in N_{MAF}$
- $\frac{c_i}{2} = \frac{0.779024552}{2} = 0.389512276$ per a tot $i \in N_{REF}$
- $\frac{c_i}{2} = \frac{0.945492578}{2} = 0.472746289$ per a tot $i \in N_{OECD}$
- $\frac{c_i}{2} = \frac{0.242121534}{2} = 0.121060767$ per a tot $i \in N_{ASIA}$

3. Definim un nou problema (N', E', c') per repartir el que queda d'acord amb les pautes de la CEL. Ara, $N' = N$, $E' = 1\,440\,000\,000 - 1\,288\,860\,000 = 151\,140\,000$ i $c'_i = \frac{c_i}{2}$ per a tot $i \in N$.

4. Busquem $CEL(N', E', c')$

4.1 La pèrdua total és $1\,137\,720\,000$, i per habitant és $\frac{1137720000}{7450130207} = 0.152711425$

4.2 Observem que:

- $c'_i - 0.152711425 < 0 \forall i \in N_{LAM}$
- $c'_i - 0.152711425 < 0 \forall i \in N_{MAF}$
- $c'_i - 0.152711425 < 0 \forall i \in N_{ASIA}$

4.3 Per tant $CEL_i(N', E', c') = 0 \forall i \in N_{LAM} \cup N_{MAF} \cup N_{ASIA}$.

4.4 Construïm un nou problema on:

- $N'' = N_{REF} \cup N_{OECD}$
- $E'' = E'$
- $c''_i = c'_i \forall i \in N''$.

4.5 La pèrdua total és ara $409\,090\,000$ i per habitant és $\frac{409\,090\,000}{1\,273\,668\,108} = 0.3211904243$.

4.6 Observem que $c''_i - 0.3211904243 > 0 \forall i \in N''$ i per tant:

$$CEL_i(N', E', c') = 0.0683218517 \quad \forall i \in N_{REF} \text{ i}$$

$$CEL_i(N', E', c') = 0.1515558647 \quad \forall i \in N_{OECD}$$

I per tant la Talmud del problema inicial és:

- $\forall i \in N_{LAM}, T_i(N, E, c) = 0.140835395$
- $\forall i \in N_{MAF}, T_i(N, E, c) = 0.0949482285$
- $\forall i \in N_{REF}, T_i(N, E, c) = 0.389512276 + 0.0683218517 = 0.4578341277$
- $\forall i \in N_{OECD}, T_i(N, E, c) = 0.472746289 + 0.1515558647 = 0.624302154$
- $\forall i \in N_{ASIA}, T_i(N, E, c) = 0.121060767$

D'acord amb els càlculs, si volem saber la quota d'emissions per regió:

- LAM rebria $0.140835395 \cdot 645\,221\,323 = \mathbf{90\,870\,000}$
- MAF rebria $0.0949482285 \cdot 1\,549\,686\,628 = \mathbf{147\,140\,000.1}$
- REF rebria $0.4578341277 \cdot 399\,859\,028 = \mathbf{183\,069\,109.3}$
- OECD rebria $0.624302154 \cdot 873\,809\,080 = \mathbf{545\,520\,891}$
- ASIA rebria $0.121060767 \cdot 3\,981\,554\,148 = \mathbf{482\,009\,999}$

Tampoc pel cas de la regla del Talmud els pagaments a les regions són els mateixos que inicialment.

Una implicació important dels càlculs realitzats és que el principi d'igualitarisme depèn de com definim el problema.

A mode de resum, i per $E = 1\,440\,000\,000$, en la Taula 5 mostrem el pagament per habitant, regió a regió, i en la Taula 4 els pagaments fets a les regions, les quotes d'emissions assignades a cada regió amb aquesta metodologia.

Taula 4: escenari RCP 8.5 amb $E = 1\,440\,000\,000$ Kt. Quotes de regions.

	C	P	CEA	CEL	T
LAM	181740000	101525999.6	125286000.1	83207332.1	90870000.0
MAF	294280000	164394581.4	294280000.0	57625146.8	147140000.1
REF	311500000	174014245.2	77642719.5	250436958.2	183069109.3
OECD	826180000	461531585.9	169672080.8	692739369.0	545520891.0
ASIA	964020000	538533586.6	773119200.4	355991190.4	482009999.0

Taula 5: escenari 8.5 amb $E = 1\,440\,000\,000$ Kt. Retribucions per habitant.

	C	P	CEA	CEL	T
LAM	0.281670790	0.157350658	0.194175232	0.128959365	0.140835395
MAF	0.189896457	0.106082467	0.194175232	0.037185032	0.094942285
REF	0.779024552	0.435188987	0.194175232	0.626313127	0.457834128
OECD	0.945492578	0.528183555	0.194175232	0.792781153	0.624302154
ASIA	0.242121534	0.135257130	0.194175232	0.089410109	0.121060767

A més a més i per a facilitar l'anàlisi comparatiu també es faciliten els càlculs per a l'escenari RCP 8.5 però amb $E = 1\,000\,000\,000$ Kt (Taulas 6 i 7) i $E = 745\,000\,000$ (Taulas 8 i 9).

Taula 6: escenari RCP 8.5 amb $E = 1\,000\,000\,000$ Kt. Quotes per regions.

	C	P	CEA	CEL	T
LAM	181740000	70504166.4	86605375.4	140343689.3	90869999.9
MAF	294280000	114162903.7	208007992.5	0	147140000.1
REF	311500000	120843225.8	53671414.7	86975676.3	178583265.2
OECD	826180000	320508045.7	117287759.5	190067324.7	390256734.8
ASIA	964020000	373981657.4	534427458.0	866051134.4	482009999.0

Taula 7: escenari RCP 8.5 amb $E = 1\,000\,000\,000$ Kt. Retribucions per habitant.

	C	P	CEA	CEL	T
LAM	0.28167079	0.10927129	0.134225842	0.06415494	0.140835395
MAF	0.189896457	0.07366838	0.134225842	0	0.094948228
REF	0.779024552	0.302214574	0.134225842	0.561508702	0.219821787
OECD	0.945492578	0.366794135	0.134225842	0.727976728	0.219821787
ASIA	0.242121534	0.093928563	0.134225842	0.024605685	0.121060767

Taula 8: escenari RCP 8.5 amb $E = 745\,000\,000$ Kt. Quotes per regions.

	C	P	CEA	CEL	T
LAM	181740000	52525603.0	64521004.6	0.0	65376783.1
MAF	294280000	85051363.3	154965954.4	0.0	147140000.1
REF	311500000	90028203.2	39982203.9	123279088.3	40515550.3
OECD	826180000	238778494.1	87379380.8	269400911.7	88538342.8
ASIA	964020000	278616334.8	398148456.2	0.0	403429323.7

Taula 9: escenari 8.5 amb $E = 745\,000\,000$ Kt. Retribucions per habitant.

	C	P	CEA	CEL	T
LAM	0.28167079	0.081407111	0.999982523	0	0.140835395
MAF	0.189896457	0.054882943	0.999982523	0	0.094948228
REF	0.779024552	0.225149858	0.999982523	0.470718175	0.219821787
OECD	0.945492578	0.273261631	0.999982523	0.637186201	0.219821787
ASIA	0.242121534	0.069976779	0.999982523	0	0.121060767

4.6 No manipulabilitat.

La conseqüència directa més important que s'obté de l'observació i comparació de les dades obtingudes a les Taules 1, 2 i 3, on els agents del problema són regions, amb les dades de les Taules 4, 6 i 8 on els agents del problema són els individus, és que si ens regim pel principi d'igualitarisme, en qualsevol de les seves tres vessants, les quotes que obtenen les regions varien en funció de qui considerem que ha de rebre els drets d'emissió: regions o persones. En canvi, sota el principi de proporcionalitat les quotes de drets d'emissió són invariants.

En aquest treball, al contrari que en els articles de Giménez-Gómez et al. (2016) i Duro et al. (2020), creiem que són les persones i no les regions, països o altres entitats que es puguin crear en el futur de cara a possibles negociacions sobre la distribució de drets d'emissió de CO₂, els veritables agents del problema, sobre els que han de recaure les conseqüències directes d'aplicar el principi d'igualitarisme. No és una observació intranscendent ja que com hem mostrat, la definició de com són els agents involucrats en el problema de repartiment, pot fer canviar, a vegades de forma molt important, els resultats finals d'aplicar el principi d'igualitarisme.

En canvi, el principi de proporcionalitat sembla ser més resistent a com es defineixen els agents que prenen part del problema de distribució. En aquest sentit, podem dir que és un principi robust en front de la comparativa regions/individus.

Amb l'objectiu de saber com és de robust el principi de proporcionalitat en front de incentius estratègics dels agents per a formar coalicions, lobbies o grups que els permetin treure partit o manipular el resultat finals de la negociació pel fet de negociar en coalicions, lobbies o grups en lloc de com a individus o regions hem estudiat l'article de de Frutos (1999).

En aquest treball s'estudien dues propietats de les solucions d'un problema de repartiment. Aquestes propietats pretenen il·lustrar els possibles incentius dels agents implicats en el problema de distribució a formar o bé coalicions més grans o bé coalicions més petites per treure avantatges de la negociació.

Per a definir aquestes propietats, que testejaran com es comporten les solucions quan canvien els conjunts d'agents (com en el cas regions/individus), necessiten primer definir el conjunt de tots els agents potencials, al que anomenarem \mathcal{N} , qualsevol problema de distribució establirà un conjunt d'agents $N \subseteq \mathcal{N}$.

Una solució, S , és **no manipulable (robusta) per divisions**, si per qualsevol $M, N \subseteq \mathcal{N}$ i qualsevol (N, E, c) i (M, E, c') , si $M \subset N$ i existeix un $i \in M$ tal que:

- $c'_i = c_i + \sum_{j \in N/M} c_j$ i,
- per a tot $j \in M \setminus \{i\}$ $c'_j = c_j$,

aleshores, S compleix que:

$$S_i(M, E, c') \geq S_i(N, E, c) + \sum_{j \in N \setminus M} S_j(N, E, c)$$

La interpretació és que una solució és **no manipulable per divisions**, si els agents no tenen incentius a dividir-se i constituir-ne un nou conjunt més gran d'agents, repartint-se la demanda inicial entre ells, de la forma que vulguin.

En el nostre treball, la interpretació d'aquesta propietat la fem assumint que una regió es pot dividir en tots els seus habitants i que la demanda de la regió es reparteix a parts iguals entre els seus habitants.

És important observar que si una solució és no manipulable en front de divisions vol dir que qualsevol possible manera de repartir la demanda entre els habitants d'una regió, per exemple cada habitant demanda exactament el que consumeix de CO₂, no comporta un guany final per a la regió.

La professora de Frutos (1999) demostra que la regla **proporcional** i la **CEL** són regles **no manipulables per divisions**, això es pot comprovar, pel nostre cas, amb l'observació de les Taules 1, 2 i 3 (per regions) i les Taules 4, 6 i 8 (per habitants). En canvi, la regla del Talmud i la CEA són solucions manipulables en aquest sentit.

Per exemple, CEA assigna a ASIA per l'escenari RCP 8.5 i $E = 1440$ Gt la quantitat de 326.24 Gt si actua com una regió (Taula 1) i 773.12 Gt si actua com els seus habitants (Taula 4). És a dir, ASIA té incentius a dividir-se si s'aplica la CEA.

També es pot observar que la regla del Talmud assigna a ASIA per a l'escenari RCP 8.5 i $E = 745$ Gt la quantitat de 175.62 Gt si actua com a regió (Taula 3) i 403.43 Gt si actua com els seus habitants (Taula 8). És a dir, ASIA té incentius a dividir-se si s'aplica la regla del Talmud.

La segona de les propietats és la dual a la **no manipulabilitat per divisions**, és a dir, la **no manipulabilitat per unions o agrupacions**.

Una solució, S , és **no manipulable (robusta) per unions o agrupacions**, si per qualsevol $M, N \subseteq \mathcal{N}$ i qualsevol (N, E, c) i (M, E, c') , si $M \subset N$ i existeix un $i \in M$ tal que:

- $c'_i = c_i + \sum_{j \in N/M} c_j$ i,
- per a tot $j \in M \setminus \{i\}$ $c'_j = c_j$,

aleshores, S compleix que:

$$S_i(M, E, c') \leq S_i(N, E, c) + \sum_{j \in N \setminus M} S_j(N, E, c)$$

La interpretació és que una solució és **no manipulable per unions**, si els agents no tenen incentius a agrupar-se i constituir un nou agent que els representi a tots sumant les seves demandes.

En el nostre treball, la interpretació d'aquesta propietat la fem assumint que una regió és una unió dels seus habitants (també podríem interpretar, alternativament, que és la unió dels seus països), que es constitueixen en regió i fan una demanda única per a tota la regió.

És important observar que si una solució compleix **no manipulació per unions** vol dir que qualsevol possible manera d'agrupar-se formant un nou agent, ja sigui per països, o formant un lobby, o constituint una empresa, etc... no comporta un guany final per els agents que s'agrupen.

La professora de Frutos (1999) demostra que la regla **proporcional** i la **CEA** són regles **no manipulables per unions**, això es pot comprovar pel nostre cas, amb l'observació de les Taules 1, 2 i 3 (regions) i les Taules 4, 6 i 8 (per habitants). En canvi, la regla del Talmud i la CEL són manipulables en aquest sentit.

Per exemple, la CEL assigna a l'OECD per a l'escenari RCP 8.5 i $E = 1000$ Gt la quantitat de 190.07 Gt si actua com els seus habitants individualment (Taula 6) i 431.08 Gt si actua com a regió (Taula 2). És a dir, els habitants de l'OECD tenen incentius a unir-se si s'aplica la CEL.

Respecte de la regla del Talmud, observem que, per exemple, assigna a ASIA per a l'escenari RCP 8.5 i $E = 1440$ Gt la quantitat de 482.01 Gt si actua com els seus habitants individualment (Taula 4) i 592.04 Gt si actua com a regió (Taula 1). És a dir, els habitants d'ASIA tenen incentius a constituir-se com a regió si s'aplica la regla del Talmud. Recordem que ASIA pot tenir incentius a dividir-se, també, si s'aplica aquesta regla (quan $E = 1440$ Gt).

De fet, el resultat més sorprenent i important al treball de de Frutos (1999) és el següent:

- **TEOREMA**:
Hi ha exactament una regla que és no manipulable per divisions i no manipulable per unions, i aquesta regla és la PROPORCIONAL.

Les implicacions d'aquest teorema en matèria de política econòmica són molt importants. En front de la tendència actual a proposar distribucions igualitàries o que segueixin algun tipus de principi d'igualitarisme (veure Duro et al., 2020), amb la perspectiva que ens dona el Teorema, podem afirmar que aquestes propostes

igualitàries, i de fet qualsevol altre que no sigui la regla proporcional a les demandes, tindran problemes de manipulabilitat. Per tant, i si és vol apostar per distribucions igualitàries, la implantació de regulacions anti-trust o per evitar unions o fusions, però també de regulacions per evitar escissions o divisions (per exemple un particular podria dividir la seva demanda en diferents empreses al seu nom) seran necessàries.

Però el que encara és més important des del nostre punt de vista, és que es fa necessària una discussió a fons i seria sobre quins han de ser els agents del problema, els subjectes que han de rebre els drets d'emissions. Com hem vist, si volem aplicar algun principi diferent a la proporcionalitat per a repartir, la definició dels agents del problema pot fer variar dràsticament els resultats finals.

5. CONCLUSIONS

Contaminem per CO₂ més del que hauríem perquè és un cost extern i l'única manera de solucionar-ho és amb regulacions que l'internalitzin. En aquest treball estudiem la regulació per drets d'emissió (per contaminar s'han de tenir drets) proposat en el protocol de Kyoto i discutit en diverses reunions climàtiques. Entenem que els agents fan les demandes (projeccions de CO₂ futures) sobre la quantitat total a repartir, estimada com aquella que fa que augmenti 2°C la temperatura de la Terra l'any 2050.

Aquest problema de justícia distributiva es pot estudiar des d'un punt de vista matemàtic senzill. Amb l'ajuda de l'aparell matemàtic concloem que la idea de "justícia" és més complex del que sembla. Depèn de si entenem que la justícia és allò proporcional (Aristòtil) o bé que és allò igualitari (Maimonides): la regla proporcional a les demandes assigna a les regions quantitats molt diferents a les regles igualitàries (CEA CEL i Talmud).

Concloem també que cal una discussió seriosa i profunda sobre qui són els agents destinataris dels drets de CO₂, aquells que s'han de tenir en compte a l'hora de repartir. La conseqüència directa més important que s'obté a l'hora d'observar i comparar les dades obtingudes a les Taules 1, 2 i 3, on els agents del problema són regions (definides en el IPCC), amb les dades de les Taules 4, 6 i 8 on els agents del problema són els individus, és que si ens regim pel principi d'igualitarisme, en qualsevol dels seus punts de vista, les quotes que obtenen les regions varien en funció de qui considerem que ha de rebre els drets d'emissió: regions o persones. Hem vist que no és el mateix plantejar un problema de distribució on els demandants siguin les regions que un on siguin els individus. En la nostra opinió creiem que el problema s'ha de resoldre des de la perspectiva de les persones. Aquest punt de vista és nou a la literatura.

Finalment, hem analitzat dues propietats amb les quals preteníem il·lustrar els possibles incentius estratègics (formar coalicions més grans o coalicions més petites) dels agents per tal de treure avantatges de les negociacions. Hem après que si una solució és no manipulable en front de divisions vol dir que qualsevol possible manera de repartir la demanda d'una regió entre els habitants d'aquesta, per exemple cada habitant demanda exactament el que consumeix de CO₂, no comporta un guany final per a la regió. És aleshores quan els agents implicats no tenen incentius a dividir-se si s'aplica aquesta regla. En canvi, si una solució és no manipulable en front d'unions els demandants no tindran cap incentiu a agrupar-se. En el treball de de Frutos (1999) es demostra que la regla **proporcional** i la **CEA** són regles **no manipulables per unions**. Mentre la **regla proporcional** i la **CEL** són regles **no manipulables per divisions**. En canvi, la CEA i la T són manipulables per divisions i la CEL i la T són manipulables per unions.

Podem observar, per exemple amb l'observació de les dades de les taules 1, 2 i 3 comparades amb les de les taules 4, 6 i 8, que totes les solucions varien quan canviem el conjunt d'agents, excepte la regla **proporcional**. Aquesta és l'única regla que no varia si el conjunt d'agents són regions o individus. De fet, PROPORCIONALITAT i NO MANIPULABILITAT són equivalents. Per tant, les propostes igualitàries, que són les més vigents avui en dia, tant en l'àmbit acadèmic com a la pràctica, són MANIPULABLES.

La nostra recomanació a les autoritats corresponents és que si aposten per l'igualitarisme necessarien primer definir correctament els agents del problema (els destinataris dels drets d'emissió) i a continuació posar restriccions legals a les agrupacions i escissions dels agents i les seves demandes. Aquesta és la contribució més important i innovadora d'aquest treball.

Bibliografia

- Aristotle, **Ethics**. J.A.K. Thomson, tr. Harmondsworth, UK: Penguin, 1985.
- Aumann, R.J. Maschler, M. (1985). **Game theoretic analysis of bankruptcy problems from the Talmud**. Journal of Economic Theory, 36: 195-213.
- De Frutos, M.A. (1999). **Coalitional manipulations in a bankruptcy problem**. Review of Economic Design, 4: 255-272.
- Duro, J.A., Giménez-Gómez, J.M., i Vilella, C. (2020). **The allocation of CO₂ emissions as claims problems**. Energy Economics, 86: 104652.
- Giménez-Gómez, J.M., Teixidó-Figueres, J. I Vilella, C. (2016). **The global carbon budget: a conflicting claims problems**. Climatic Change, 136: 693-703.
- IPCC, 2014. **Climate Change 2014: Mitigation of Climate Change**. Contribution of Working Group III to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change. In: Edenhofer, O., Pichs-Madruga, R., Sokona, Y., Farahani, E., Kadner, S., Seyboth, K., Minx, J.C. (Eds.),. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA.
- Krugman, P., Wells, R., Graddy Kathryn (2013). **Fundamentos de Economía**. Editorial Reverté.
- Mas-Colell, A., Whinston, M.D., Green, J.R. (2012). **Microeconomic Theory**. Oxford University Press.
- Meinshausen, M., Meinshausen, N., Hare, W., Raper, S.B., Frieler, K., Knutti, R., Frame, D., and Allen, M., (2009). **Greenhouse-gas emission targets for limiting global warming to 2°C**. Nature 458 (7242), 1158-1162.
- O'Neill, B. (1982). **A problem of rights arbitration from the Talmud**. Mathematical Social Sciences, 2: 345-371.
- Riahi, K. Gruebler, A. and Nakicenovic N. (2007). **Scenarios of long-term socio-economic and environmental development under climate stabilization**. Technological Forecasting and Social Change 74, 7, 887-935.
- Thomson, W. (2019). **How to divide when there is not enough. From Aristotle, the Talmud and Maimonides to the Axiomatics of resource allocation**. Econometric Society Monograph. Cambridge University Press. Cambridge.
- Young H.P (1994). **Equity. In theory and practice**. Princeton University Press.
- Zhou, P., Wang, M., (2016). **Carbon dioxide emissions allocation: a review**. Ecological Economics 125, 47-59.