



**XIè Premi PRBB al millor treball de recerca en
Ciències de la Salut i de la Vida**

2016

Treball guanyador del 1r premi

Anàlisi fractal del comportament tumoral

Helena Izquierdo González

Tutor: Albert Dotras

Maristes Valldemia (Mataró)



ANÀLISI FRACTAL DEL COMPORTAMENT TUMORAL

Helena Izquierdo González

2n BATX A

Agraeixo la col·laboració de l'institut ViCOROB de la Universitat de Girona per haver-me proporcionat el material necessari per al meu treball de recerca, de l'especialista en neuroradiologia Beatriz Gómez per haver-me ajudat amb la part mèdica de diagnòstic per imatge i d'en Néstor Andreu per ajudar-me amb la part més matemàtica.

Gràcies.

Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y las cortezas de los árboles no son lisas ni los relámpagos caen en una línea recta.

Benoît Mandelbrot

TAULA DE CONTINGUTS

1. Introducció	1
1.1. Objectius del treball.....	2
2. Inici a la geometria	3
3. Fractal	5
3.1. Autosimilitud o autosemblança	6
3.2. Definició algorítmica	8
3.3. Dimensió de Hausdorff-Besicovitch.....	17
4. Història dels fractals	19
5. Dimensió de Hausdorff-Besicovitch	24
5.1. Perquè es necessita una dimensió fraccionària?	26
5.2. Fractals amb dimensió de Hausdorff-Besicovitch entera.....	30
6. Tècniques per mesurar la dimensió de Hausdorff-Besicovitch.....	32
6.1. Box-Counting.....	32
6.2. Mètode píxel	33
7. Dimensió de Hausdorff-Besicovitch d'un fractal.....	35
7.1. Mitjançant la tècnica Box-Counting.....	35
7.2. Mitjançant la tècnica píxel	38
7.3. Comparativa: Box-Counting/Píxel.....	42
8. Introducció al desenvolupament tumoral.....	43
8.1. Com es forma un tumor?	43
9. Diagnòstic anatomopatològic de benignitat i malignitat	45
9.1. Característiques de benignitat i malignitat tumoral.....	45
10. Càncer de mama.....	47
11. Anàlisi fractal del comportament d'un tumor de mama.....	49
11.1. Hipòtesis.....	49
11.2. Metodologia.....	49
11.3. Resultats.....	65
11.3.1. Box-Counting.....	65
11.3.2. MatLab	66
11.4. Conclusions MatLab	66

11.5. Conclusions Box-Counting	72
12. Conclusions del treball	73
13. Bibliografia.....	75
- Annex I.....	76
- Annex II.....	79

1. INTRODUCCIÓ

Inicialment volia fer el treball de recerca relacionat amb l'àmbit de la medicina però durant les primeres recerques de tema em vaig adonar que la part pràctica escapava de les meves possibilitats. Davant d'això vaig considerar altres àmbits alternatius com per exemple les matemàtiques. Una segona recerca em va portar al tema dels fractals, el qual desconeixia totalment. Els fractals són un concepte teòric amb múltiples aplicacions: des de la música fins a l'art, passant per la medicina. La seva aplicació mèdica em permetia fer un treball que tractés l'àmbit de la medicina i que estigués dins les meves capacitats. Per això em vaig decidir per aquest tema.

Els fractals són figures geomètriques irregulars que es repeteixen a infinita escala i que presenten eines per analitzar-los. L'eina més important d'anàlisi fractal es pot aplicar a qualsevol objecte o estructura que presenti un comportament semblant a aquest. Paral·lelament, les neoplàsies¹ es defineixen com a proliferacions² cel·lulars descontrolades amb una associació directa entre irregularitat i malignitat. És per això que una de les aplicacions més recents de la geometria fractal és els tumors.

L'objectiu general d'aquest treball és comprendre a escala teòrica aquesta nova geometria, els seus mecanismes d'anàlisi i aplicar-los a l'àmbit mèdic de l'oncologia com a eina complementària en el diagnòstic per imatge. Actualment als Estats Units ja hi ha estudis que proposen l'anàlisi fractal com un mitjà addicional que permetria millorar el diagnòstic radiològic dels tumors de mama.

El treball es divideix en dues parts. La primera part està relacionada pròpiament amb els conceptes matemàtics de la geometria fractal. Aquests apartats expliquen que és un fractal, quines característiques té i com el podem analitzar. A més hi ha també un incís que explica la història de com van sorgir i qui els va descobrir. Aquestes pàgines tenen la finalitat de fer una introducció a aquesta nova branca de les matemàtiques. L'anàlisi fractal pot arribar a adquirir una gran complexitat però

¹ Formació d'un teixit nou.

² Producció ràpida i repetida d'alguna cosa.

l'aplicació mèdica només utilitza les bases d'aquesta àrea. Per tant, el meu treball se centra en aquestes bases més simples.

La segona part tracta l'aplicació mèdica que tenen: és un estudi que pretén predir el comportament d'una mostra de 18 tumors de mama a partir de l'anàlisi fractal d'aquests. També hi ha una petita introducció a les neoplàsies, en general, per poder parlar d'aspectes necessaris per treure després conclusions.

Tot i que vaig haver de fer front a un seguit de dificultats en la part pràctica, la principal limitació la vaig trobar al principi del treball. El concepte de fractal és recent i per tant la informació existent no és gaire ampla o està en anglès. Per això, he redactat la part teòrica basant-me en articles científics i en el llibre escrit pel pare dels fractals: Benoît Mandelbrot. He escollit aquest llibre, entre d'altres, perquè explica aquesta nova geometria des del principi de tot i amb un llenguatge divulgatiu i clar.

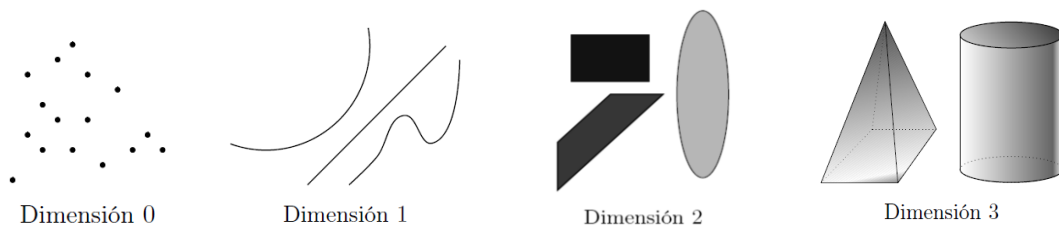
1.1. OBJECTIUS DEL TREBALL

1. Conèixer la revolució de la complexitat i el sorgiment de la geometria fractal
2. Definir què és un fractal mitjançant les seves característiques bàsiques
3. Estudiar les eines d'anàlisi fractal
4. Analitzar fractalment un tumor
5. Establir la relació entre la dimensió fractal d'un tumor i el seu comportament

2. INICI A LA GEOMETRIA

Ubiquem el naixement de la geometria clàssica o geometria euclidiana al segle III aC. Aquesta àrea sorgeix de la necessitat i inquietud del ésser humà per conèixer, analitzar i mesurar tot allò que troba al seu voltant. En aquest context neix també el concepte de dimensió que es defineix com una primera estimació de la mida d'un objecte. La dimensió, a més a més, ens indica la forma adequada per poder-lo mesurar.

La geometria euclidiana ens ensenya que un punt o un conjunt de punts constitueixen una figura de dimensió 0, que una recta constitueix una figura de dimensió 1, que un pla o qualsevol superfície constitueix una figura de dimensió 2, i per finalitzar, que un cub té dimensió 3. No obstant això, les formes i figures que estudia la geometria clàssica són ideals, suaus, regulars, és a dir, bastant allunyades de les que es troben en realitat a la naturalesa.



Dimensions euclidianes³

A principis del segle XX, l'àmbit de la física va completar aquestes dimensions amb d'altres més elevades, com per exemple la dimensió 4, utilitzada per mesurar el temps. Altres físics van proposar que la realitat podia tenir una cinquena dimensió, utilitzada per explicar el fenomen de la força de la gravetat. I així, constantment, les dimensions de la realitat van anar augmentant amb propostes que anaven de 10, 11 fins a 22 dimensions.

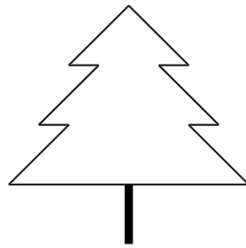
Durant aquests segles es podia parlar d'espais n-dimensionals, però n sempre havia de ser un nombre enter, no podia ser ni fraccionari ni irracional.⁴

³ Imatge extreta del PDF: SABOGAL, Sonia; ARENAS Gilberto. PDF: "Una introducció a la geometria fractal". Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2011.

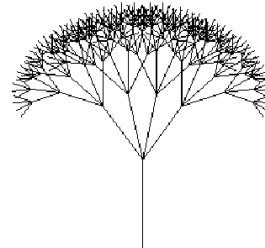
Amb la revolució de la complexitat s'abandona la perfecció geomètrica i es comença a estudiar geometries menys perfectes. La geometria euclidiana deixa de ser l'única existent i n'apareixen altres com la geometria projectiva⁵, la no euclidiana⁶ o la topològica⁷.

A finals del segle XIX, concretament a la dècada dels 70, sorgeixen unes figures molt irregulars que posseeixen propietats geomètriques totalment diferents de les estudiades fins aquell temps. L'estudi d'aquests objectes i de les seves propietats fa que neixi una nova geometria: **la geometria fractal**.

La geometria fractal ens intenta donar una aproximació més real de les formes, objectes i fenòmens naturals.



Arbre segons la geometria Euclidiana⁸



Arbre segons la geometria Fractal⁹

Amb l'estudi de la nova teoria fractal, les dimensions dels objectes es posen en dubte i es plantegen noves preguntes: és possible que n esdevingui un nombre no enter? La resposta va ser afirmativa. D'aquesta manera es va donar nom als objectes que estudiaré en aquest treball.

La dimensió que accepta un valor no enter rep el nom de dimensió fractal i l'objecte que posseeix aquesta dimensió s'anomena *fractal*.

⁴ Fragment extret del llibre: MANDELBROT, Benoît. *Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión*. Círculo de lectores S.A., Barcelona, 1997, página 7.

⁵ Branca de la geometria que estudia les propietats d'incidència, és a dir com s'intersequen, les figures geomètriques sense tenir en compte les seves mesures.

⁶ Branca de la geometria que difereix en algun dels cinc postulats bàsics de la geometria euclidiana.

⁷ Branca de la geometria que estudia els problemes algebraics que sorgeixen d'estudiar les dimensions.

^{8/4} Imatges extretes del PDF: SABOGAL, Sonia; ARENAS Gilberto. PDF: "Una introducción a la geometría fractal". Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2011.

3. FRACTAL

El terme *fractal* procedeix de l'adjectiu llatí *fractus* i del verb corresponent *frangere* que significa «fragmentar». *Fractus*, a més a més de significar «fragmentat» també es pot interpretar com «irregular».

Els objectes fractals són figures molt diferents d'aquelles estudiades a l'antiguitat. Es caracteritzen per ser irregulars o fragmentats, com bé indica el seu nom i per tenir una dimensió fractal, que s'explicarà amb més detall més endavant.

Una definició més ampla o més concreta de fractal és difícil d'establir. Avui en dia encara no hi ha una definició formal de la paraula fractal perquè aquesta branca de les matemàtiques és encara molt jove i no hi ha gaires estudis fets. L'any 1986, Benoît Mandelbrot¹⁰ va donar una definició bastant aproximada dels conjunts fractals: «*Els fractals són conjunts que tenen una dimensió topològica inferior a la seva dimensió de Hausdorff-Besicovitch*». Però aquesta definició no és gaire aclaridora, ja que alguns conjunts fractals no s'haurien de considerar com a tals si només tinguéssim en compte aquesta característica.

Actualment, es considera que un fractal és un objecte que posseeix aquestes quatre característiques¹¹:

1. Té detalls a totes les escales, és a dir, quan ampliem el fractal com si féssim un zoom trobem els mateixos detalls observats a escala global.
2. És autosimilar o autosemblant, les seves parts tenen una estructura semblant o igual al conjunt total.
3. Té una definició algorítmica simple.
4. Té una dimensió topològica inferior a la seva dimensió de Hausdorff-Besicovitch.

Perquè es pugui considerar un objecte fractal ha de complir totes aquestes característiques. Encara que compleixi una o algunes d'elles no el podem considerar part de la geometria fractal. Per exemple, una recta és autosimilar, ja que si l'ampliem,

¹⁰ Benoît Mandelbrot es considerat el pare dels objectes fractals. Amb el seu llibre «Los objetos fractales» va donar inici a aquesta nova geometria.

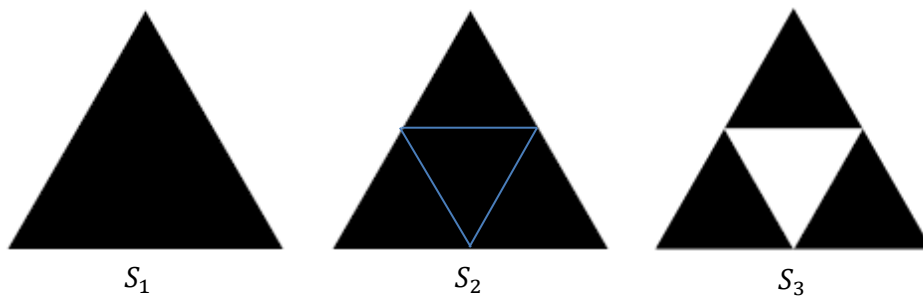
¹¹ Veieu apartats posteriors.

veiem que té la mateixa forma que el conjunt total. Tot i això, la recta no és considerada un fractal.

3.1. AUTOSIMITUD O AUTOSEMBLANÇA

Les dues primeres característiques anteriors les podem agrupar en una. Un dels aspectes més visuals dels fractals és que són autosimilars o autosemblants. Quan ampliem el fractal a qualsevol escala trobem detalls que són iguals o molt semblants al conjunt total. Per explicar millor aquesta característica utilitzarem com a exemple el fractal *Triangle de Sierpinski*.¹²

Per construir aquest fractal hem de començar amb un triangle qualsevol que posseeixi un interior, és a dir, que estigui ple. A continuació, unim els punts mitjans de cada costat del triangle de manera que el seu interior quedi dividit en quatre triangles més petits i per últim eliminem el triangle central.

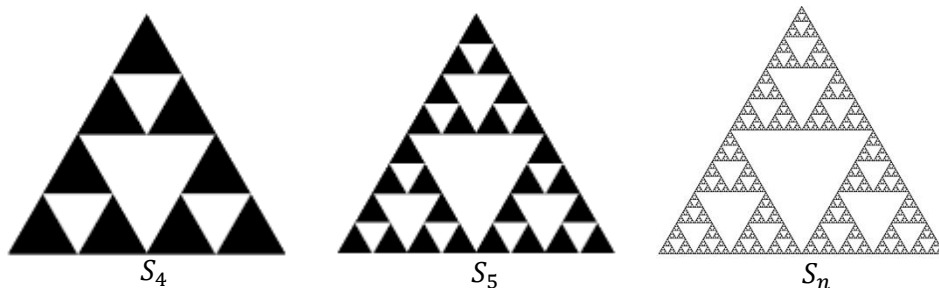


Primers passos de la construcció del Triangle de Sierpinski¹³

Ara hem de repetir el procediment (unir els punts mitjans dels costats i eliminar el triangle central) en els tres triangles que hem obtingut en la figura S_3 . Quan ho fem obtindrem nou triangles més en els quals repetirem el procediment i obtindrem vint-i-set triangles més, i així successivament fins a arribar a la figura S_n , que anomenem figura límit perquè és la figura que obtindríem si arribéssim al límit del procés.

¹² Fractal descobert l'any 1916 pel matemàtic polac Waclaw Sierpiński.

¹³ Imatge pròpia.

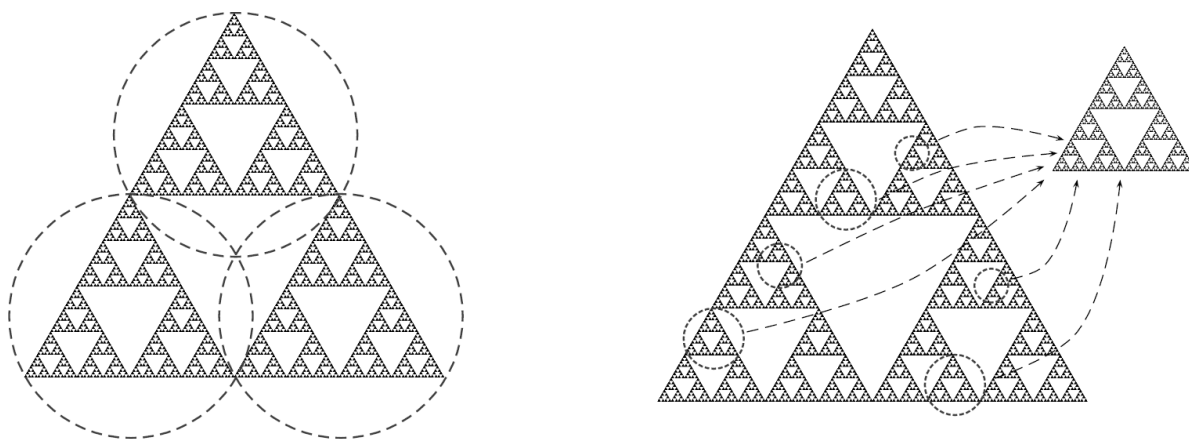


Construcció del Triangle de Sierpinski¹⁴

Tot i que el procés de construcció està format per infinits passos, a partir de la figura S_4 o S_5 ja es pot tenir una idea de com serà la figura que obtindrem. En les figures posteriors ja no es perceben, a simple vista, les diferències entre un pas i un altre.

Al dur a terme aquest procediment hem pogut observar clarament la característica d'autosimilitud, ja que el procediment es tracta de repetir sempre el mateix pas.

Si observem la figura S_n veiem que el Triangle de Sierpinski està format per infinites còpies d'ell mateix, però reduïdes i col·locades en diferents posicions. **El tot és igual a les seves parts, amb la diferència d'un factor escala.**



Autosimilitud en el Triangle de Sierpinski¹⁵

La característica d'autosimilitud es pot observar en diferents graus. Això fa que puguem distingir tres tipologies:

^{14/11} Imatges extretes del PDF: SABOGAL, Sonia; ARENAS Gilberto. PDF: "Una introducció a la geometria fractal". Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2011.

- **Autosimilitud exacta:** és el tipus més marcat d'autosimilitud. Exigeix que el fractal mantingui sempre la mateixa estructura o forma a totes les escales. Un exemple seria el que hem explicat en aquest apartat: el Triangle de Sierpinski.
- **Autosimilitud aproximada o quasisimilitud:** la trobem en els fractals en els quals la forma de les parts i la forma del conjunt presenten diferències entre si. Aquesta autosimilitud és present en els fractals de la naturalesa (fractals naturals). Per exemple en aquesta fulla d'arbre:



Quasisimilitud en una fulla¹⁶

- **Autosimilitud estadística:** és el tipus més dèbil d'autosimilitud. Només es conserven algunes propietats estadístiques durant el canvi d'escala. És difícil d'observar-la a simple vista. Aquest tipus el podem trobar en els fractals aleatoris, com per exemple les muntanyes.

3.2. DEFINICIÓ ALGORÍTMICA

Els fractals a simple vista poden semblar complexos de crear. Podríem pensar que han estat creats mitjançant una funció complexa. Però, en canvi, la geometria fractal es basa en definicions algorítmiques senzilles que es repeteixen infinites vegades.

Per exemplificar aquesta característica utilitzarem com a exemple el fractal *Conjunt de Mandelbrot*.

¹⁶ Imatge extreta d'Internet: <http://complexud.com/sites/default/files/images/coliflor_Fotor_Collage.png>

El conjunt de Mandelbrot, també anomenat conjunt M, té moltes propietats remarcables però la més interessant és que la seva estructura, considerada la més complexa de les matemàtiques, està basada en un procediment iteratiu. Tot i que el conjunt M està compost per passos simples, crear-lo a mà és gairebé impossible, ja que el seu estudi requereix realitzar bilions d'iteracions. És per això que no va ser estudiat fins que van existir ordinadors moderns. Tot i això, el conjunt M va néixer gràcies a estudis anteriors dels matemàtics Gaston Julia i Pierre Fatou.

En un procediment iteratiu, el resultat d'un càlcul és utilitzat com a expressió inicial per tornar a realitzar el mateix càlcul. Es tracta d'agafar un número sobre el qual es realitza una operació, repetir el mateix procediment amb el resultat i continuar fent-ho indefinidament. La representació general d'una iteració és:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Per entendre-ho millor imaginem que l'operació que es repeteix és elevar al quadrat un número. Llavors la iteració que obtenim és

$$x_{n+1} = x_n^2$$

Si apliquem aquesta iteració sobre un valor inicial $x_0 = 2$ obtenim la seqüència (2, 4, 16, 256, 65536...) que tendeix a infinit. La seqüència de números que es genera en un procés iteratiu s'anomena **òrbita** i el punt al qual tendeix l'òrbita s'anomena **atractor** (en aquest cas ∞).

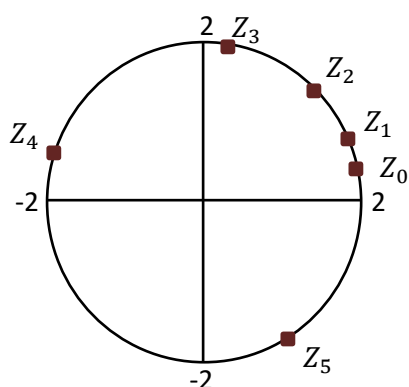
La iteració del conjunt M és $z_{n+1} = z_n^2 + c$ on z és un número complex¹⁷ i c una constant també complexa. Es basa en triar un número complex, elevar-lo al quadrat, sumar-li una constant complexa i tornar a repetir el procediment. L'òrbita que es genera depèn del valor z inicial i de la constant c .

Per fer la iteració del conjunt M no s'utilitza qualsevol número complex triat a l'atzar, sinó un conjunt de números complexos determinats. Per entendre quin conjunt és aquest, primer cal conèixer la base dels estudis de Gaston Julia i Pierre Fatou.

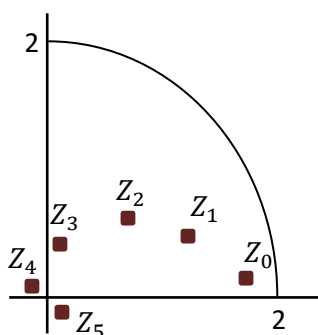
¹⁷ Els números complexos permeten situar punts en un pla anomenat pla complex. En la seva forma cartesiana (indicant la coordenada x i y) un número complex z està format per una coordenada real i una imaginària. La imaginària és la part vertical (y) i la seva unitat és i , on i és igual a $\sqrt{-1}$. La part real és la part horitzontal (x). La representació d'un número complex qualsevol és: $z=x+yi$.

L'any 1906, Fatou va demostrar que utilitzar la iteració $z_{n+1} = z_n^2 + c$ sobre els punts del pla creava òrbites que generalment tenen com a atractor l'infinit, excepte un conjunt definit de punts que tenen com a atractor el zero. Aquest conjunt de números s'anomenen **presoners**, ja que mai escapen a infinit. Les òrbites d'aquest conjunt de números van donar nom a una figura: el conjunt de Fatou¹⁸.

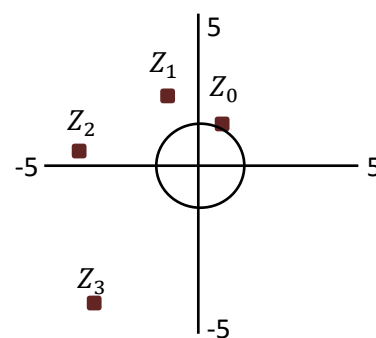
Els números que tenen com a atractor l'infinit els anomenem escapistes. Entre els escapistes i els presoners es crea una frontera de números, que anomenem números **guardians** i que avui en dia es coneixen com el conjunt de Julia.



Números guardians



Números presoners



Números escapistes¹⁹

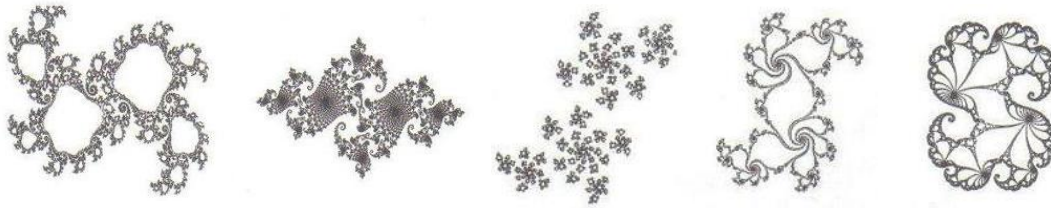
Quan un punt es troba dins del cercle convergeix cap a l'origen (0,0), quan es troba fora el cercle s'escapa cap a l'infinit i quan es troba en la línia del cercle roman sempre allà. Això ens fa dividir el pla complex en dues regions: la dels punts presoners i la dels punts escapistes. Però, a partir de quin valor podem dir que els punts s'escapen? En el cas habitual, el radi del cercle que fa de frontera és 2.

Una òrbita pot estar formada per números presoners i per números escapistes. Quan iterem un número tenim dues possibles opcions de resultat: que el número estigui fora el cercle de radi 2 (i per tant diem que aquest número s'escapa) o que estigui dins el cercle. Si es troba dins el cercle el que farem és tornar-lo a iterar per poder veure quin resultat obtenim. Aquest procediment ens permet crear l'algoritme conegut com a "tiempo de escape".

¹⁸Avui en dia aquests conjunts no presenten importància i són considerats part dels conjunts de Julia.

¹⁹Imatges pròpies basades en el llibre: « Una nueva manera de ver el mundo » de Maria Isabel Binimelis

El conjunt de Julia es pot subdividir en molts conjunts més que depenen de la constant utilitzada. Per a diferents constants trobem diferents conjunts.



Conjunts de Julia²⁰

Aquestes imatges es poden classificar en dos tipus:

- **Conjunts connexos:** el cos està format per una sola peça.
- **Conjunts inconnexos:** el cos està dividit en diferents col·leccions de punts.

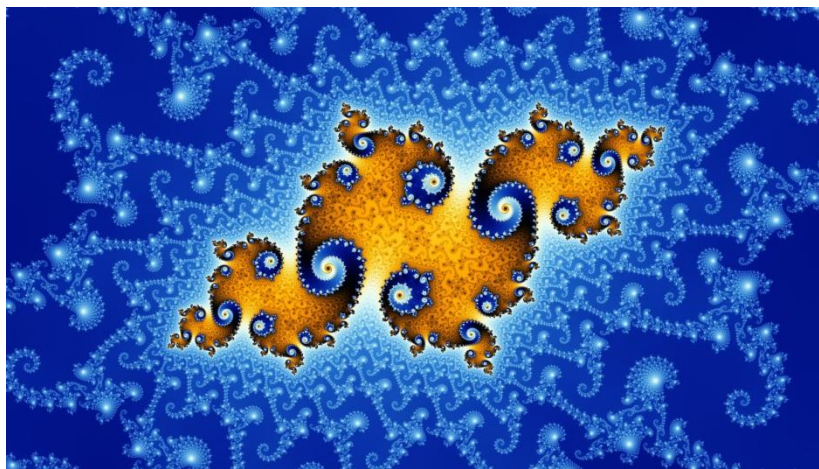
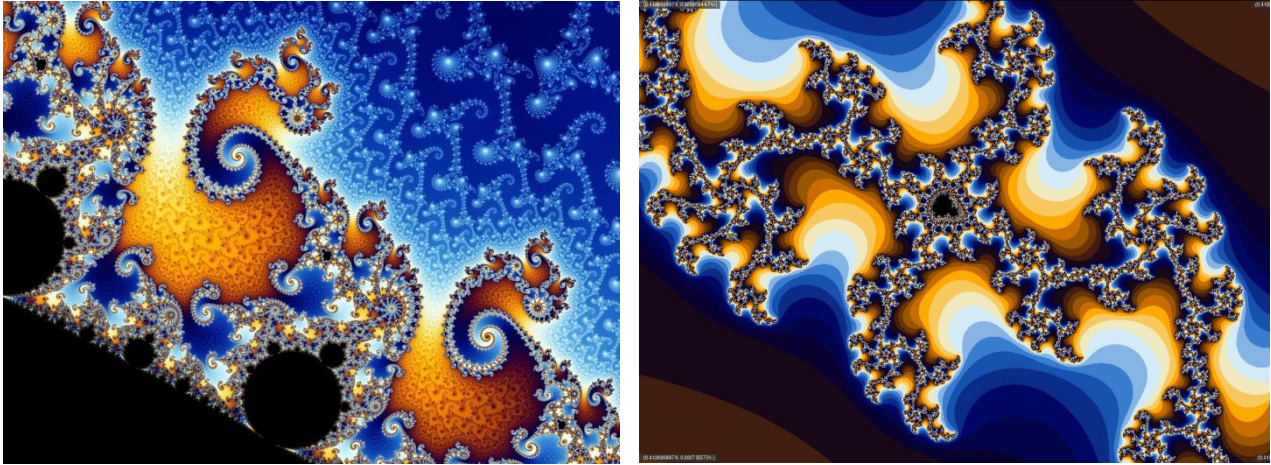
Aquesta distinció ens permet separar els valors de la constant c en dos grups: els que en la iteració $z_{n+1} = z_n^2 + c$ donen lloc a conjunts connexos i els que donen lloc a conjunts inconnexos.

Per dur a terme aquesta classificació i veure la variació de c , no cal analitzar tots els punts dels conjunts de Julia. Julia i Fatou van crear un teorema que diu que l'òrbita del punt $(0,0)$ ens ajuda a saber si el conjunt és connex o inconnex. El teorema afirma que si l'òrbita del $(0,0) +$ el paràmetre c tendeix a infinit, el conjunt és connex.

Mandelbrot va utilitzar el teorema de Julia i Fatou per crear una figura excepcional. Utilitzant la iteració quadràtica explicada abans i prenent com a punt inicial el $z_0 = 0 + 0i$ del teorema, va localitzar tots els valors de la constant c que donen lloc a conjunts de Julia connexos. Una vegada localitzats, es va adonar que al representar aquests valors de c al pla complex es crea una estructura realment complexa, que va anomenar el **Conjunt de Mandelbrot**. Si ampliem aquest conjunt a diverses escales es pot trobar tots conjunts de Julia connexos amagats entre la seva estructura.

Per tant podem definir el conjunt M com la representació en un pla complex de tots els valors de la constant c que donen lloc a conjunts de Julia connexos.

²⁰ Imatge extreta d'Internet: <http://farm7.staticflickr.com/6042/6380767331_882c62711b_o.jpg>



Conjunts de Julia amagats en el Conjunt M²¹

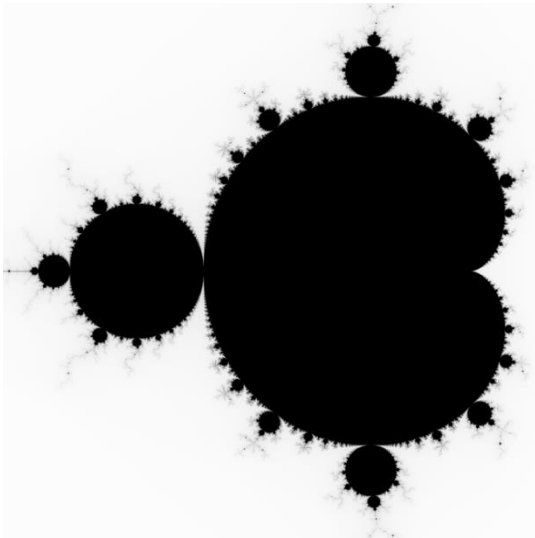
L'explicació del conjunt M ens fa veure la certesa de la quarta característica dels fractals: tot i tenir una estructura complexa, estan creats mitjançant processos simples i normalment iteratius.

Per poder veure el procés exacte utilitzat en la construcció del conjunt M, a continuació realitzarem el que serien les primeres òrbites de la seva estructura utilitzant l'algoritme "tiempo de escape".

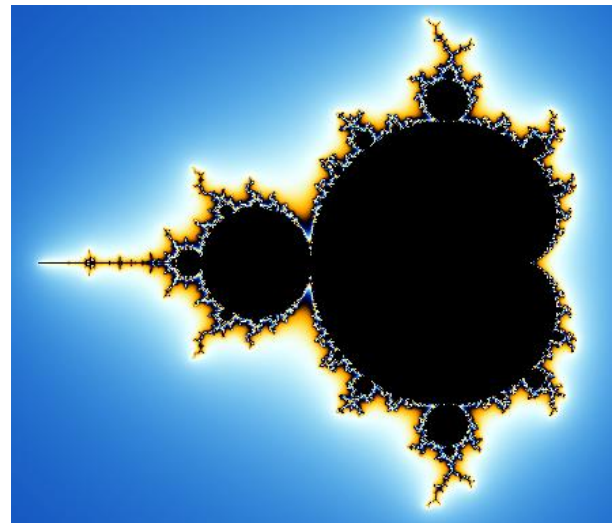
L'algoritme "tiempo de escape" consisteix a diferenciar els punts del pla segons el nombre d'iteracions que necessiten per escapar del cercle de radi 2. Per construir el conjunt M és un ordinador l'encarregat d'aplicar aquest algoritme, com ja hem explicat

²¹ Imatges extretes d'Internet:
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a4/Mandel_zoom_11_satellite_double_spiral.jpg,
<http://pygame.org/shots/698.png>,
http://img04.deviantart.net/f515/i/2013/167/0/1/mandelbrot_set_zoom_in_4k_by_seryzone-d698sw7.jpg,

abans. Per tant, l'ordinador calcularà la primera iteració d'un conjunt de punts, pintarà d'un color determinat aquells que superin el cercle de radi 2, aquells que tenen com a tractor l'infinit, i deixarà de color negre els altres. Amb els punts negres que quedin al costat dels que acabem de pintar (és a dir, la frontera entre els punts pintats i els punts negres) calcularem la segona iteració, pintarem d'un color diferent els que superin el cercle de radi 2 i deixarem de color negre els altres. Aquest procediment l'hauré de repetir fins que gairebé tots els punts negres hagin desaparegut.



Conjunt de Mandelbrot²²



Conjunt de Mandelbrot mitjançant
l'algoritme "tiempo de escape"²³

Construcció de les primeres òrbites del conjunt M




Per poder dur a terme una bona representació del conjunt M s'hi hauria d'iterar molts paràmetres c , i això equival a molts números del pla complex. Aquesta feina només és factible dur-la a terme amb un ordinador. Per exemple una possible constant seria $(1+2i)$, però la següent que hauríem d'iterar seria $(1+2.01i)$. Ja veiem que d'aquesta manera el procés seria infinit, i fer-lo manualment no donaria resultat. Per poder donar una idea de com s'iniciaria el procés, podem generalitzar els punts del pla complex en quadrats, on cada quadrat inclou diferents punts.

²² Imatge extreta d'Internet: <<https://markbrown778.files.wordpress.com/2012/12/mandelbrot-3.png>>

²³ Imatge extreta d'Internet: <http://farm7.staticflickr.com/6224/6380642607_4edffe9e96_o.png>

(-2,2)	(-1.5,2)	(-1,2)	(-0.5,2)	(0,2)	(0.5,2)	(1,2)	(1.5,2)	(2,2)
(-2,1.5)	(-1.5,1.5)	(-1,1.5)	(-0.5,1.5)	(0,1.5)	(0.5,1.5)	(1,1.5)	(1.5,1.5)	(2,1.5)
(-2,1)	(-1.5,1)	(-1,1)	(-0.5,1)	(0,1)	(0.5,1)	(1,1)	(1.5,1)	(2,1)
(-2,0.5)	(-1.5,0.5)	(-1,0.5)	(-0.5,0.5)	(0,0.5)	(0.5,0.5)	(1,0.5)	(1.5,0.5)	(2,0.5)
(-2,0)	(-1.5,0)	(-1,0)	(-0.5,0)	(0,0)	(0.5,0)	(1,0)	(1.5,0)	(2,0)
(-2,-0.5)	(-1.5,-0.5)	(-1,-0.5)	(-0.5,-0.5)	(0,-0.5)	(0.5,-0.5)	(1,-0.5)	(1.5,-0.5)	(2,-0.5)
(-2,-1)	(-1.5,-1)	(-1,-1)	(-0.5,-1)	(0,-1)	(0.5,-1)	(1,-1)	(1.5,-1)	(2,-1)
(-2,-1.5)	(-1.5,-1.5)	(-1,-1.5)	(-0.5,-1.5)	(0,-1.5)	(0.5,-1.5)	(1,-1.5)	(1.5,-1.5)	(2,-1.5)
(-2,-2)	(-1.5,-2)	(-1,-2)	(-0.5,-2)	(0,-2)	(0.5,-2)	(1,-2)	(1.5,-2)	(2,-2)

D'aquesta manera el pla complex es converteix en una quadrícula de 81 quadrats. Cada quadrat representa un interval de (0.5,0.5).

Per poder fer una simulació de com seria el conjunt M, s'iteren els paràmetres c que hi ha a la quadrícula. Per diferenciar en quina iteració el mòdul supera el radi 2, que seria llavors una constant que donaria lloc a un conjunt connex, utilitzem l'algoritme "tiempo de escape". D'aquesta manera, els paràmetres c que a la primera iteració escapen a infinit els pintem de color , els que escapen a la segona iteració de color  i els que escapen a la tercera o no escapen, de color . Així es creen tres òrbites que podrien simular a grans trets i de manera molt generalitzada el conjunt M.


Com que el valor inicial de z en cada punt que volem estudiar és $z_0 = (0+0i)$, el primer resultat que obtindrem sempre és el mateix paràmetre c que estiguem sumant.


$$z_1 = z_0^2 + c = (0 + 0i)^2 + c = c$$


Per tant, en els càlculs que he realitzat i que es troben als annexos, en la primera iteració no escric tot el càlcul sinó que directament calculo el mòdul de c, ja que z_1 sempre coincideix amb el valor de c.

Una vegada obtinguts els resultats, pintem els quadrats de la quadrícula amb el seu color corresponent.

(-2,2)	(-1.5,2)	(-1,2)	(-0.5,2)	(0,2)	(0.5,2)	(1,2)	(1.5,2)	(2,2)
(-2,1.5)	(-1.5,1.5)	(-1,1.5)	(-0.5,1.5)	(0,1.5)	(0.5,1.5)	(1,1.5)	(1.5,1.5)	(2,1.5)
(-2,1)	(-1.5,1)	(-1,1)	(-0.5,1)	(0,1)	(0.5,1)	(1,1)	(1.5,1)	(2,1)
(-2,0.5)	(-1.5,0.5)	(-1,0.5)	(-0.5,0.5)	(0,0.5)	(0.5,0.5)	(1,0.5)	(1.5,0.5)	(2,0.5)
(-2,0)	(-1.5,0)	(-1,0)	(-0.5,0)	(0,0)	(0.5,0)	(1,0)	(1.5,0)	(2,0)
(-2,-0.5)	(-1.5,-0.5)	(-1,-0.5)	(-0.5,-0.5)	(0,-0.5)	(0.5,-0.5)	(1,-0.5)	(1.5,-0.5)	(2,-0.5)
(-2,-1)	(-1.5,-1)	(-1,-1)	(-0.5,-1)	(0,-1)	(0.5,-1)	(1,-1)	(1.5,-1)	(2,-1)
(-2,-1.5)	(-1.5,-1.5)	(-1,-1.5)	(-0.5,-1.5)	(0,-1.5)	(0.5,-1.5)	(1,-1.5)	(1.5,-1.5)	(2,-1.5)
(-2,-2)	(-1.5,-2)	(-1,-2)	(-0.5,-2)	(0,-2)	(0.5,-2)	(1,-2)	(1.5,-2)	(2,-2)

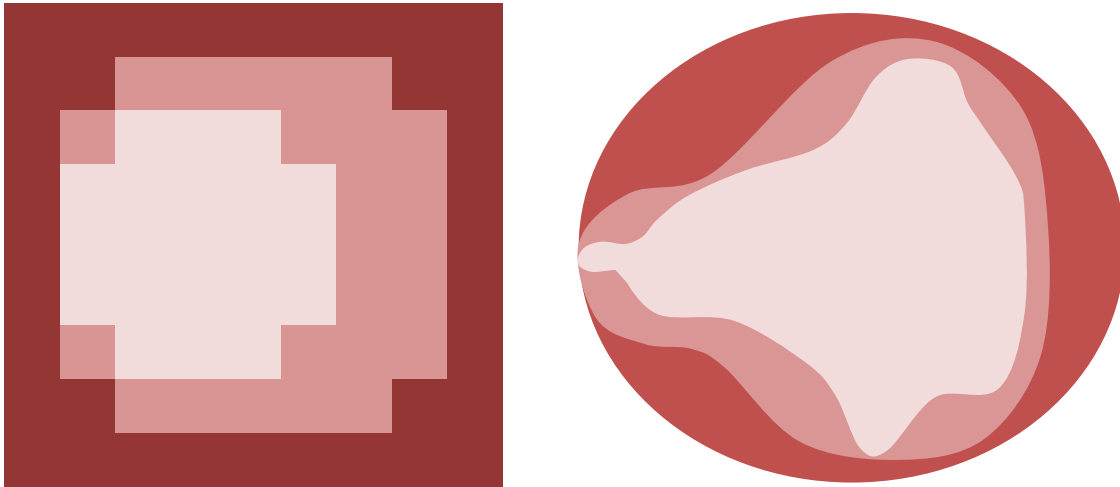
Primera iteració 

Segona iteració 

Tercera iteració 

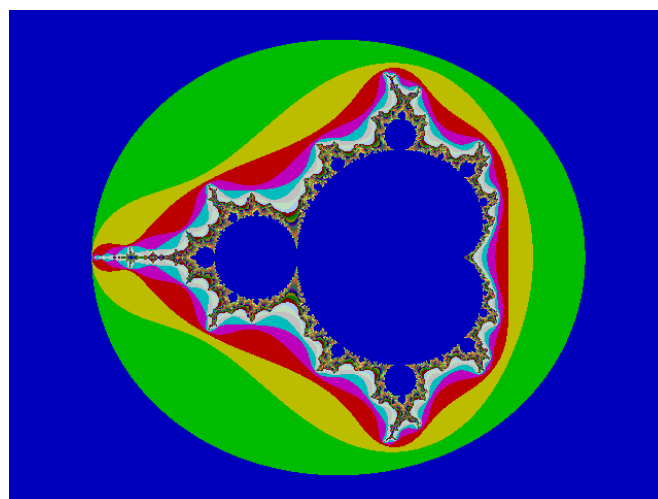
En veritat, cada quadrat hauria de ser un simple punt i a més a més no s'haurien d'iterar només fins a tres cops cada constant, sinó tantes vegades com fes falta perquè l'òrbita escapés a infinit. És a dir, aquells punts que a la tercera iteració no escapen a infinit (i que he pintat de color rosa) s'haurien d'iterar fins que escapessin i els hauríem de pintar d'un altre color diferent. D'aquesta manera anem acorralant cada cop més i més aquells punts que no escapen mai i que haurien de quedar negres en el centre de la figura.

Així seria una imatge de les primeres òrbites:



Representació del Conjunt M^{24}

La imatge de l'esquerra és la representació del conjunt M utilitzant la quadrícula del pla complex que he creat abans. Però el conjunt M no és un quadrat, ja que per definició formen part del conjunt tots aquells punts que el seu mòdul supera el cercle de radi 2. Això fa que el contorn sigui un cercle. Per això, he creat la imatge de la dreta, que seria la representació verdadera del conjunt M . Si continuéssim iterant els punts que no escapen a infinit a la tercera iteració, aproximariem més la forma real del conjunt. En la següent foto es veu el resultat si haguéssim continuat el procés:



Conjunt M^{25}

²⁴ Imatges pròpies mitjançant el Word

²⁵ Imatge extreta d'Internet: <<http://html.rincondelvago.com/0000479629.png>>

Amb el procediment que hem fet, però, justifiquem la característica de definició algorítmica senzilla.

3.3. DIMENSIÓ DE HAUSDORFF-BESICOVITCH

La dimensió de Hausdorff-Besicovitch en un fractal és superior a la seva dimensió topològica. Però, què és la dimensió topològica i què la dimensió de Hausdorff-Besicovitch?

La primera definició que es va donar de dimensió topològica establia una dimensió per tots els objectes que existien:

- a) Un conjunt buit té dimensió topològica = -1
- b) Un punt té dimensió topològica = 0
- c) Un segment té dimensió topològica = 1
- d) Una superfície té dimensió topològica = 2
- e) Un volum té dimensió topològica = 3

Més tard, es va donar una segona definició de dimensió topològica utilitzant el moviment com a referència: en un segment només ens podem moure en una direcció i per tant només tenim una dimensió. En un quadrat ens podem moure endavant i enrere i cap a dalt i cap a baix, per tant tenim dimensió 2. I per finalitzar, en un cub tenim tres direccions i per tant tenim dimensió 3.

Felix Hausdorff dona, més endavant, una altra idea de dimensió. Ell dedueix una fórmula²⁶ o una igualtat que permet calcular la dimensió d' un objecte. En la majoria de casos, quan apliquem la fórmula obtenim el mateix resultat que obtindríem si apliquéssim la definició de dimensió topològica. En altres casos, però, el resultat obtingut és diferent.

Aquests objectes, els que quan apliquem la fórmula obtenim una dimensió diferent de la dimensió topològica, són els fractals. La dimensió que obtenim mitjançant la fórmula l'anomenem dimensió de Hausdorff-Besicovitch o simplement

²⁶ Veieu apartat 5 on es detalla la fórmula.

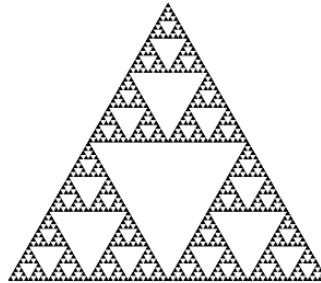
dimensió fractal, i té com a característica que sempre és superior a la dimensió topològica del fractal.

A continuació tenim tres exemples que confirmen aquesta característica i l'exemplifiquen:



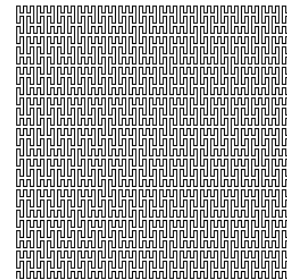
$$D_T = 2 \quad D_H = 2$$

$$D_T = D_H$$



$$D_T = 1 \quad D_H \approx 1,584$$

$$D_T > D_H$$



$$D_T = 1 \quad D_H = 2$$

$$D_T > D_H$$

Dimensions topològiques i dimensions de Hausdorff-Besicovitch en diferents objectes: D_T significa dimensió topològica i D_H , dimensió de Hausdorff-Besicovitch²⁷

En aquests exemples podem distingir dues figures que són considerades fractals i una que no. El quadrat no és un fractal perquè la seva dimensió topològica és igual a la seva dimensió de Hausdorff-Besicovitch. Les altres dues figures, el Triangle de Sierpinski (figura 2) i la corba de Peano (figura 3), sí que són fractals.

²⁷ Imatge basada en el PDF: SABOGAL, Sonia; ARENAS Gilberto. PDF: "Una introducció a la geometria fractal". Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2011.

4. HISTÒRIA DELS FRACTALS

El concepte pròpiament dit de fractal va sorgir no fa gaire. L'any 1975 surt per primera vegada la paraula fractal en el títol d'un article publicat al diari francès *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. Tot i que el concepte i definició de fractal és relativament nou, trobem investigadors anteriors a aquest any que ja havien fet treballs amb algunes de les característiques, per separat, dels fractals. Gràcies en part a aquests treballs i a Benoît Mandelbrot, es va poder consolidar la geometria fractal.

La menció més antiga del concepte d'autosimilitud que coneixem es remunta al segle V aC. Dintre del grup dels filòsofs pluralistes, Anaxàgores destaca per encunyar el concepte d'homeomeria. Aquest concepte és el que avui en dia coneixem com a autosimilitud o autosemblança. Anaxàgores defensava que l'univers és format per un conjunt de llavors a les quals la nostra ment ha donat ordre i forma. Cada llavor és tan complexa com el tot, perquè totes estan formades per les altres llavors.

Els matemàtics més antics que van participar de manera indirecta en la creació de la geometria fractal són Georg Cantor i Julius Wilhelm Richard Dedekind. Cantor i Dedekind treballaven en diverses teories junts, i per aquest motiu mantenien correspondència. L'any 1877, Cantor envia una carta a Dedekind on proposa reconsiderar les teories clàssiques de les dimensions. Tot i que ell planteja aquesta qüestió, no investiga sobre el tema.

Durant els següents anys es van anar descobrint figures que avui en dia són considerades fractals, i que en aquell moment simplement eren figures amb característiques estranyes. L'any 1916 Waclaw Sierpiński dona a conèixer una figura autosemblant construïda a partir d'un algoritme iteratiu basat en la partició d'un triangle. Avui en dia es coneix amb el nom de Triangle de Sierpinski.

L'any 1918, Gaston Julia i Pierre Fatou, per separat, comencen a investigar els processos iteratius amb números complexos, i per tant, en el pla complex. Ambós estableixen les bases de què és un procés iteratiu. Aquests estudis són un punt clau per a la formació dels fractals.

Com hem comentat al principi, Cantor havia deixat un tema obert: el valor de les dimensions. Felix Hausdorff, l'any 1919, reprèn aquest tema i proposa una altra versió generalitzada de dimensió que podria admetre valors fraccionaris. Tot i que els seus estudis eren molt bons, no estaven del tot completats. Aquests estudis van ser finalitzats l'any 1928 per Georges Bouligand i ampliat al 1934 per Abram Besicovitch. De fet, Abram va ser qui més va aportar a la teoria de les dimensions fraccionàries i a qui se li atribueix més mèrit en el descobriment. Per això, avui en dia, la versió de dimensió que accepta valors fraccionaris s'anomena dimensió de Hausdorff-Besicovitch.

Durant el desenvolupament de la teoria de la dimensió de Hausdorff-Besicovitch, el 20 de novembre del 1924 neix a Varsòvia Benoît Mandelbrot, conegut actualment com el pare dels fractals.



Benoît Mandelbrot²⁸

Benoît Mandelbrot va néixer en el si d'una família jueva. L'any 1936 va haver de traslladar-se a París per fugir dels nazis. A París residia un dels seus tiets, Szolem Mandelbrot, que era professor de matemàtiques en el Collège de France i que per tant, es va encarregar de la seva educació. Slozem havia estat estudiant, durant els seus anys de carrera, els treballs fets per Gaston Julia i Pierre Fatou. Tot i la seva intensa dedicació, no va fer cap aportació ni resoldre el misteri de les construccions creades per Julia i Fatou. Quan Mandelbrot va ingressar en la École Polytechnique de París, l'any 1945, el seu tiet li va dir: «*Hi ha un problema que no he pogut resoldre*

²⁸ Imatge extreta d'Internet:
<<http://www.theactuary.com/EasysiteWeb/getresource.axd?AssetID=328560&type=full&servicetype=inline>>

durant 25 anys i que ningú ha resolt. Aquest problema és la construcció dels conjunts de Julia i Fatou. Si pots trobar alguna cosa nova, qualsevol cosa, tindràs la carrera feta»²⁹. Mandelbrot no s'ho va pensar i va començar a fer les seves pròpies investigacions sobre aquests conjunts. Però la manca de recursos va provocar que ell tampoc pogués esbrinar res nou. Llavors, l'any 1958, decideix anar a viure als Estats Units i treballar a la IBM, una empresa relacionada amb l'àmbit informàtic. Mentre treballa a la IBM també comença a donar classes a la Universitat Harvard com a professor de matemàtiques en l'Escola d'Economia. Treballant en l'àmbit econòmic és quan comença a observar els primers indicis de la geometria fractal. L'any 1962, observa la invariància de les fluctuacions dels preus vers als canvis d'escala temporal: la forma de les fluctuacions dels preus és la mateixa que la forma de la variació durant el dia, la setmana, el mes o l'any. Aquesta observació dóna lloc a les primeres idees de Mandelbrot sobre l'autosimilitud.

L'any 1963, Edward Lorenz (matemàtic i meteoròleg americà) va observar un comportament caòtic en els sistemes dinàmics (sistema que varia el seu estat amb el temps). Ell ho va aplicar a l'àmbit amb què treballava: a la meteorologia. Va demostrar que qualsevol petita variació que s'apliqui a un sistema dinàmic inicial, farà que el desenvolupament a mitjà o llarg termini del sistema variï completament respecte a la variable aplicada. Lorenz va utilitzar un concepte més simple per explicar aquest comportament: «l'aleteig d'una papallona a Brasil pot causar un tornado a Texas». Aquesta frase ens dóna lloc al concepte conegut amb el nom d'efecte papallona. Aquest efecte s'ha d'interpretar de la següent manera: imaginem-nos dos mons quasi idèntics, però en el primer hi ha una papallona aletejant les seves ales i en el segon no. Al cap d'un període de temps, el món de la papallona i el món on no hi ha papallona seran completament diferents, fins i tot en un món podria haver-hi un tifó i a l'altre no. Aquests estudis van donar lloc a la **teoria del caos**, que serà relacionada més tard amb la geometria fractal.

L'any 1967, Mandelbrot publica a la revista *Science* un article titulat: «How long is the Coast of Britain?». En aquest article Mandelbrot explica com la mesura d'una línia geogràfica depèn del regle utilitzat per mesurar. Quan utilitzes una escala de

²⁹ Paraules dites per Benoît Mandelbrot en el vídeo Ted Talks: <https://www.youtube.com/watch?v=ay8OMOs6AQ>

mesura inferior, els detalls més petits de la línia es poden mesurar millor, i per tant, el resultat augmenta. Mandelbrot interpreta aquests resultats com que els contorns geogràfics tenen propietats d'autosimilitud estadística. L'article no diu que les línies geogràfiques siguin fractals, sinó que tenen un comportament fractal. També cal destacar que Mandelbrot no utilitza la paraula fractal en cap moment de l'article perquè aquest terme va ser creat més endavant.

Mandelbrot és considerat el pare dels fractals per unificar la geometria fractal, però els descobriments que formen part de la teoria no són deguts a ell. Mandelbrot va estudiar un seguit de figures i va observar els elements que tenien en comú: autosimilitud, dimensió de Hausdorff-Besicovitch fraccionària (en algunes ocasions), detalls iguals a totes les escales i que estaven creats per processos iteratius simples. Una tarda de 1975 va intentar buscar un nom per aquell conjunt de figures que ell havia estudiat. Buscant en un diccionari de llatí va trobar el participi del verb *frangere*, que va utilitzar per crear el terme que descriuria aquells objectes: **fractal**. És així com sorgeix el nom de fractal i la **geometria fractal**.

L'any 1975, Mandelbrot publica el llibre «*Les objets fractals*», que recull totes les seves idees sobre aquestes noves figures i on exposa les bases d'una nova geometria alternativa a l'euclidiana.

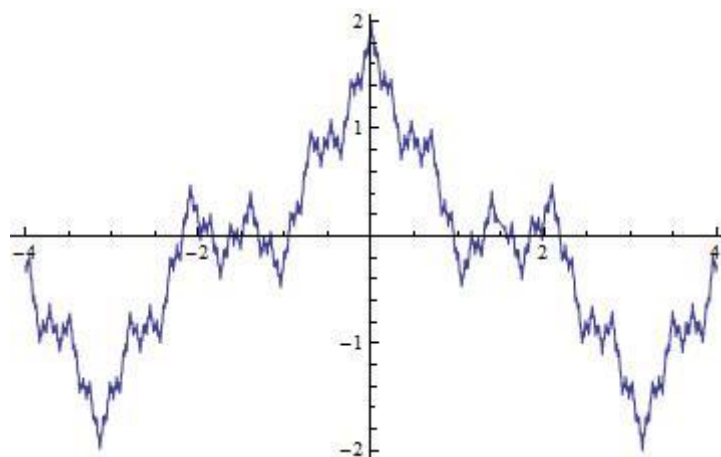
L'any 1979, es comencen a fer investigacions sobre la Teoria del Caos i els fractals, i s'aconsegueix relacionar-les. La Teoria del Caos es defineix com la branca de les ciències que estudia els sistemes dinàmics susceptibles a les variacions en les condicions inicials. Els fractals són la representació de la Teoria del Caos, representen aquests sistemes dinàmics que varien fàcilment. Per exemple, si a la fórmula del Conjunt de Mandelbrot s'afegeix un 1 sumant, el resultat variarà completament.

L'any 1980, Mandelbrot descobreix la figura més complexa de les matemàtiques i l'anomena Conjunt de Mandelbrot o Conjunt M. L'any 1945 havia estudiat els conjunts de Julia i Fatou però no havia obtingut èxit per la manca de recursos. Però l'any 1980 Mandelbrot ja es troba treballant a la IBM. En aquell moment s'estava desenvolupant la tecnologia dels ordinadors, i la IBM posseïa els ordinadors amb més potencia que existien. Mandelbrot, en lloc d'estudiar nous

aspectes de les matemàtiques, va aprofitar l'accés als ordinadors per reprendre aspectes ja estudiats anteriorment. Va tornar, aleshores, a tractar els conjunts de Julia i Fatou. Aquesta vegada, gràcies a la tecnologia, va ser capaç de fer un gran descobriment: el conjunt M.

No es pot determinar quin va ser el primer fractal descobert, ja que quan Mandelbrot va proposar aquest nou concepte, no ho va fer amb un fractal concret inventat per ell, sinó amb figures que ja s'havien descobert. Tot i això, la figura que he trobat més antiga amb les característiques de fractal i que avui dia és considerada un fractal és la funció de Weierstrass.

La funció de Weierstrass va ser descoberta l'any 1872 per Karl Weierstrass. És una funció contínua en tots els punts del pla, però no és derivable en cap d'ells. La seva dimensió fractal està compresa entre 1 i 2. Té quasisimilitud.



Funció de Weierstrass³⁰

La geometria fractal ha anat evolucionant a mesura que ha evolucionat la tecnologia. Avui dia és present a molts àmbits: medicina, música, art... Els fractals ens permeten conèixer millor algunes estructures que desconeixíem o que aproximàvem a formes més simples. La geometria fractal es considerada la nova eina per estudiar la complexitat.

³⁰ Imatge extreta d'Internet:
<http://web.williams.edu/Mathematics/csilva/Real%20Analysis%20Website%202.0/Images/WeierstrassFunction.jpg>

5. DIMENSIÓ DE HAUSDORFF-BESICOVITCH

La dimensió de Hausdorff-Besicovitch o dimensió fractal (DF) normalment és un nombre fraccionari, tot i que a vegades, també trobem fractals amb una dimensió fractal entera.

La dimensió de Hausdorff-Besicovitch mesura el grau d'irregularitat d'un objecte que presenta una irregularitat constant a diferents escales. És a dir, ens indica de quina manera omple l'espai en què es troba immers el fractal o dit d'una altra manera, **quina és la seva eficàcia per ocupar l'espai**.

Per exemple, si un fractal té dimensió de Hausdorff-Besicovitch igual a 1,584 vol dir que omple més espai que una recta però menys que una superfície.

La dimensió de Hausdorff-Besicovitch es pot calcular mitjançant la fórmula següent, on d és el valor de la dimensió:

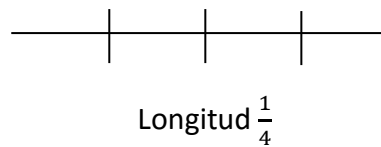
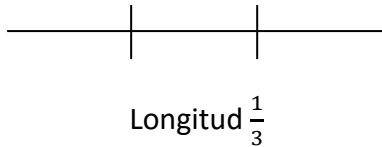
$$N(r) = \left(\frac{1}{r}\right)^d$$

Per poder arribar a aquesta fórmula, es va treballar amb els objectes que es coneixien en aquell moment: els objectes euclidians. Aplicant mètodes sobre ells, es va arribar a establir aquesta igualtat, que més tard va ser posada en pràctica amb els objectes fractals.

Si tenim una recta de longitud 1 i la dividim en dos parts, obtenim dos segments de longitud $\frac{1}{2}$.



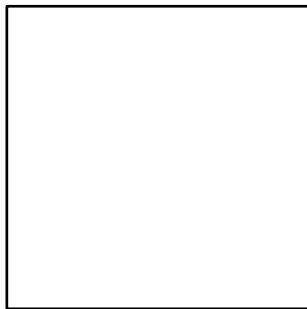
Si tornem a agafar la recta de la longitud 1 i la dividim en tres parts, obtenim tres segments de longitud $\frac{1}{3}$. Si dividim la recta en quatre parts, obtenim quatre segments de longitud $\frac{1}{4}$. I així podríem anar fent successivament.



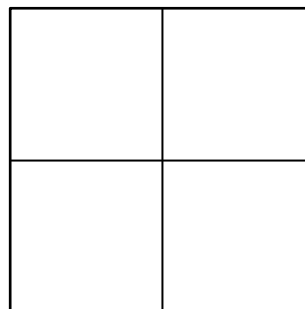
Si observem aquests números, podem establir una relació entre ells, on 1,2,3... són els segments obtinguts i $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots$ el factor escala utilitzat per a dividir la recta inicial:

$$1 = \left(\frac{1}{1}\right)^1 \quad 2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^1 \quad 3 = \left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^1 \quad 4 = \left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\right)^1$$

Si tenim un quadrat de costat 1 i el dividim els seus costats en dos parts, obtenim quatre quadrats de costat $\frac{1}{2}$.

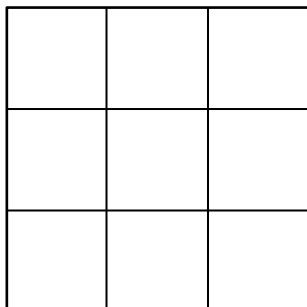


Costat 1

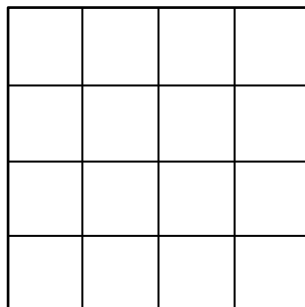


Costat $\frac{1}{2}$

Si tornem a agafar el quadrat de costat 1 i el dividim en tres parts, obtenim nou quadrats de longitud $\frac{1}{3}$. Si dividim els costats del quadrat en quatre parts, obtenim setze quadrats de longitud $\frac{1}{4}$. I així podríem anar fent successivament.



Costat $\frac{1}{3}$



Costat $\frac{1}{4}$

Si observem els resultats, podem establir una altra vegada una relació entre ells:

$$1 = \left(\frac{1}{1}\right)^2 \quad 4 = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2 \quad 9 = \left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^2 \quad 16 = \left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\right)^2$$

Si féssim aquest procediment amb un cub, arribaríem a les mateixes conclusions:

$$1 = \left(\frac{1}{1}\right)^3 \quad 8 = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^3 \quad 27 = \left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^3 \quad 64 = \left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\right)^3$$

D'aquests procediments podem treure una relació en comú entre el factor escala (r) i el número de còpies $[N(r)]$ de la mateixa forma que necessitem per cobrir la forma inicial. Si ho posem en termes generals, arribem a la fórmula explicada a dalt. Si la relació es compleix per una forma, el valor de d és la dimensió d'aquesta forma.

5.1. PERQUÈ ES NECESSITA UNA DIMENSIÓ FRACCIONÀRIA?

Els conceptes mesura i dimensió es troben lligats l'un amb l'altre. Si parlem de dimensió topològica, entenem la longitud com la mesura en dimensió 1, l'àrea com la mesura en dimensió 2 i el volum com la mesura en dimensió 3. També podem dir que contar és mesurar en dimensió 0.

Quan calculem l'àrea d'una recta el resultat és nul, i quan contem tots els punts que la constitueixen el resultat és infinit. Amb les mesures obtingudes no podem determinar quina és la mida de la recta. Per tant, per mesurar una recta, la mesura correcta és la longitud (mesura de la dimensió 1) que ens proporciona un valor finit i no nul de la seva mida real. Observem que cada objecte té una mesura o una dimensió establerta.

Quan intentem trobar la mida real d'algun fractal ens trobem que cap de les mesures o dimensions explicades ens donen un resultat no nul o finit. Per tant, ens plantejem que els fractals no pertanyin a cap de les dimensions anteriors i sí que ho facin a una altra alternativa: la dimensió fractal.

Agafem per exemple el fractal anomenat *Conjunt de Cantor*:³¹



Conjunt de Cantor³²

Intentem determinar la seva mesura en dimensió 0. En la construcció del Conjunt de Cantor els extrems mai desapareixen perquè sempre ometem el terç central però mai els dels extrems. Això ens fa observar que el fractal té infinits punts i per tant la seva mesura en dimensió 0 és infinita.

Per intentar determinar la seva longitud omplirem la següent taula:

Passos	1	2	3	4	5	N
Intervals	2	4	8	16	32	2^n
Longitud interval	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{3^n}$
Longitud total del pas	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{243}$	$\frac{2^n}{3^n}$

La longitud total del Conjunt de Cantor ve determinada pel valor que obté la fracció $\frac{2^n}{3^n}$ quan n tendeix a infinit.

Calculem el límit quan la fracció tendeix a ∞ :

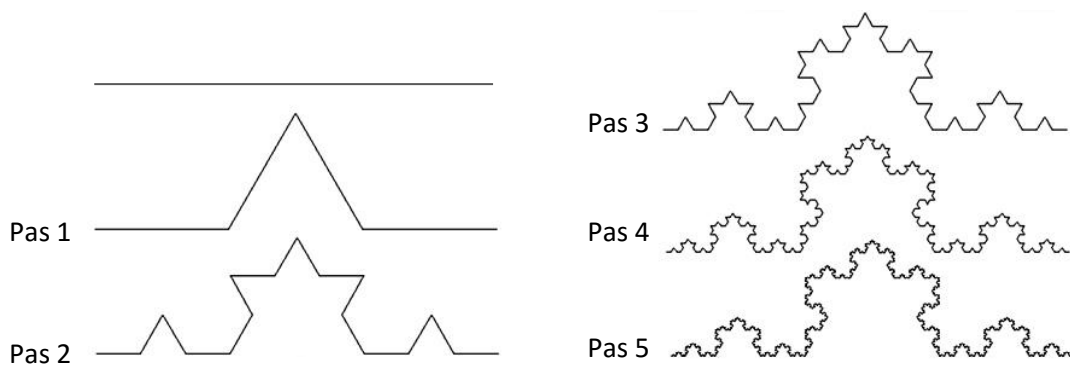
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^\infty = 0$$

³¹El **Conjunt de Cantor** és un fractal que es construeix dividint una línia en tres parts. D'aquestes tres parts n'ometem la central i tornem a dividir les dues parts dels extrems en tres trossos. Així contínuament.

³² Imatge extreta d'Internet: <<https://profmate.files.wordpress.com/2014/02/peine-de-cantor2.png>>

Les dimensions 0 i 1 no ens donen resultats exactes de quina mida té el Conjunt de Cantor. En dimensió 0 el resultat és infinit i en dimensió 1 el resultat és 0. Això ens indica que per poder mesurar la mida del Conjunt de Cantor hauríem d'utilitzar una dimensió compresa entre 0 i 1. La dimensió de Hausdorff-Besicovitch del Conjunt de Cantor ens indicaria que el fractal ocupa l'espai d'una manera superior a un punt, però d'una manera inferior a una recta. La seva dimensió fractal és de 0,6309...

Repetim el procediment amb el fractal anomenat *Corba de Koch*.³³



Corba de Koch ³⁴

Per intentar determinar la seva longitud omplirem la següent taula:

Passos	1	2	3	4	5	N
Segments	4	16	64	256	1024	4^n
Longitud segment	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{3^n}$
Longitud total del pas	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{64}{27}$	$\frac{256}{81}$	$\frac{1024}{243}$	$\frac{4^n}{3^n}$

La longitud total del fractal ve determinada pel valor que obté la fracció $\frac{4^n}{3^n}$ quan n tendeix a infinit:

³³ La **Corba de Koch** és un fractal que s'obté al dividir un segment en tres parts i substituir el terç central per els dos costats d'un triangle equilàter. Una vegada fet, tornem a dividir cada segment en tres parts i repetim el procediment.

³⁴ Imatge extreta d'internet: <http://csdt.rpi.edu/african/African_Fractals/koch4.jpg>

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^\infty = \infty$$

Per calcular la seva àrea ens fixem en el pas 1 i en el pas 2:



En el pas 1 observem que podem contenir el fractal en un rectangle de base 1 i altura $\frac{1}{3}$.



En el pas 2 podem contenir el fractal en 4 rectangles de base $\frac{1}{3}$ i altura $\frac{1}{9}$.

Continuem fent aquest procediment i recollim els resultats en una taula semblant a l'anterior:

Passos	1	2	3	4	5	N
Rectangles pels que està formada	1	4	16	64	256	4^{n-1}
Base dels rectangles	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{3^{n-1}}$
Altura dels rectangles	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{3^n}$

Amb els resultats de la taula calculem la seva àrea en el pas n :

$$\text{Àrea (Pas } n): 4^{n-1} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}$$

Fem el límit quan n tendeix a infinit per saber quin és el valor concret de l'àrea:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n-1}}{9^{n^2-1}} = 0$$

En aquest cas tampoc obtenim resultats concrets sobre la mida de la Corba de Koch. En dimensió 1 obtenim que la seva longitud és infinita i en dimensió 2 que la seva àrea és 0. Per poder mesurar la Corba de Koch hauríem d'utilitzar una dimensió compresa entre 1 i 2. La dimensió de Hausdorff-Besicovitch de la Corba de Koch té un grau d'ocupació de l'espai superior al d'una recta però inferior al d'una superfície. La seva dimensió fractal és de 1,2618...

5.2. FRACTALS AMB DIMENSIÓ DE HAUSDORFF-BESICOVITCH ENTERA

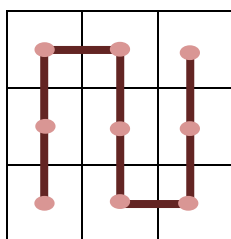
La principal característica dels fractals és que la seva dimensió de Hausdorff-Besicovitch és més gran que la seva dimensió topològica, fet que no indica que la seva dimensió fractal hagi de ser fraccionària. La majoria dels fractals, però, posseeixen dimensió fraccionària. Cal distingir bé aquest fet perquè a vegades, per no tenir la dimensió de Hausdorff-Besicovitch fraccionària, es considera un objecte no fractal, quan en realitat sí que ho és perquè compleix que la dimensió fractal és superior a la topològica.

Un exemple d'aquest fet és la **corba de Peano**. Aquest fractal va ser descobert pel matemàtic italià Giuseppe Peano l'any 1890.

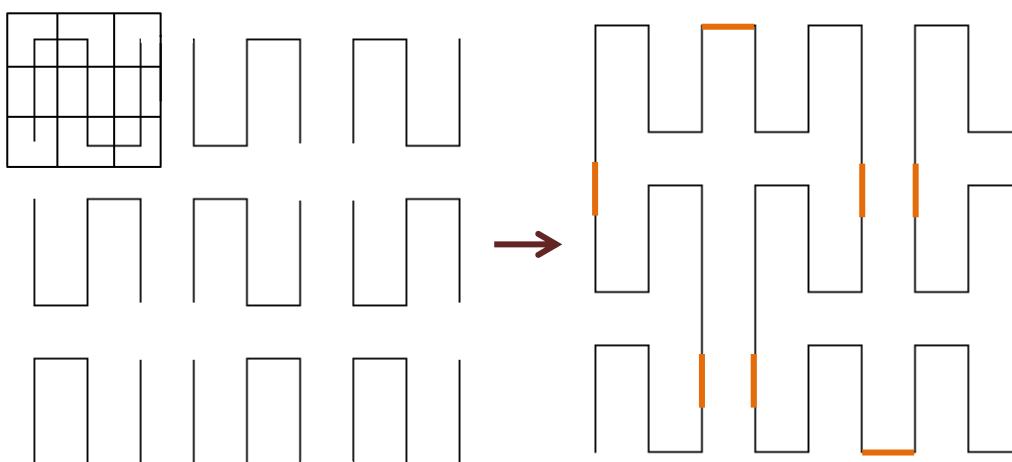
La corba de Peano és un tipus de corba que recobreix un pla de dues dimensions. Com que la seva estructura principal és una línia recta, té dimensió topològica 1. Però en cobrir tota una superfície, quan es repeteix infinites vegades, té dimensió de Hausdorff-Besicovitch 2. Tot i que la seva dimensió fractal no és fraccionària, és major que la dimensió topològica, i per tant, la corba de Peano és considerada un fractal.

Construcció de la corba de Peano:

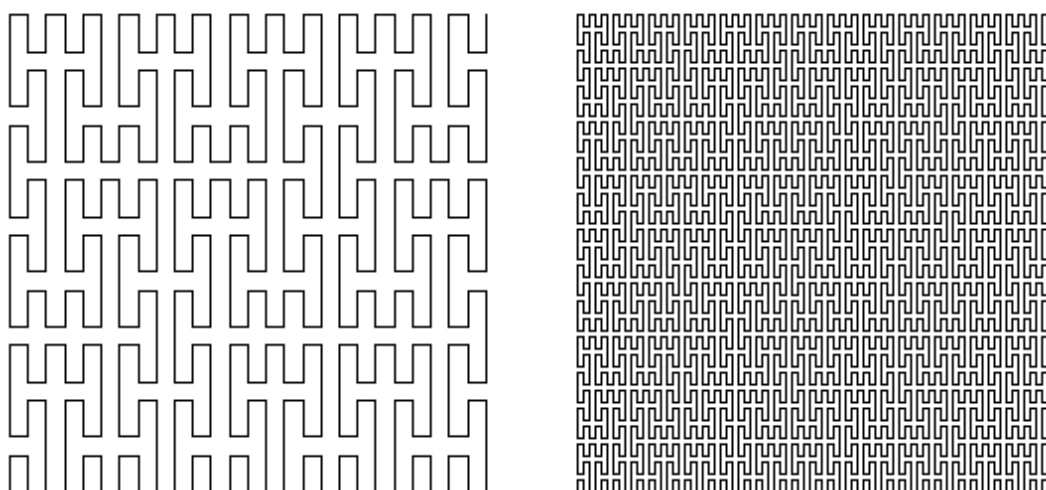
1. Agafem un quadrat i el dividim en una quadrícula de 9 quadrats. Una vegada fet això, unim els centres de cada quadrat formant un N.



2. Repetim el procediment de dibuixar una N en 9 quadrats, però en diferents direccions. Unim les diferents N de manera que formin totes una sola línia.



3. La figura límit que obtenim si repetim el procés successivament ocupa tota la superfície del pla.



Corba de Peano³⁵

³⁵ Imatge basada en el PDF: SABOGAL, Sonia; ARENAS Gilberto. PDF: "Una introducción a la geometría fractal". Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2011.

6. TÈCNiques PER MESURAR LA DIMENSIó DE HAUSDORFF-BESICOVITCH

El càlcul del components de la fórmula de Hausdorff-Besicovitch es pot dur a terme per diferents processos, però el Box-Counting és el més senzill i el més utilitzat.

6.1. BOX-COUNTING

El box-counting consisteix en un mètode repetitiu. L'objectiu d'aquest procés és dividir l'objecte que estem estudiant en trossos cada vegada més petits per després poder observar-los a una escala més baixa. Es tracta d'anar fent un zoom per veure com varien els detalls amb l'escala. Per aconseguir aquest objectiu no ampliem el fractal estudiat sinó que reduïm la mida de l'element que estem utilitzant per calcular la seva dimensió.

El mètode es basa a cobrir el fractal amb caixes d'una mida x . Una vegada cobert, contem el nombre de caixes que hem utilitzat per poder cobrir el seu contorn. Hem de repetir el procediment amb caixes de mida més petita, com per exemple de mida $\frac{x}{2}$. I així successivament fins que no puguem fer més petita l'escala de reducció de les caixes.

Una vegada apuntats els resultats, els posem en una gràfica. Si el procediment està ben fet, els punts ens quedaran alineats sobre una línia recta. **El pendent d'aquesta línia és la dimensió fractal de l'objecte estudiat.**

Per crear la gràfica hem d'utilitzar la fórmula explicada a l'apartat 5 on aplicant logaritmes podem aïllar la dimensió (d):

$$N(r) = \left(\frac{1}{r}\right)^d \rightarrow d = \frac{\log N(r)}{\log \frac{1}{r}}$$

on l'eix y correspon a $\log N(r)$ i l'eix x a $\log \frac{1}{r}$. D'aquesta manera quan diem que la dimensió fractal és el pendent de la gràfica, el que estem fent és utilitzar la fórmula de la dimensió aïllada. El pendent d'una recta correspon a la $\tan \alpha$ que forma amb l'eix x . La $\tan \alpha$ al seu torn correspon a $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ o expressat d'una altra manera a $\tan \alpha = \frac{y}{x}$. Com es pot veure les dues fórmules són equivalents.

Aquest mètode es pot dur a terme per ordinador o manualment, tot i que utilitzant els programes dedicats específicament a aquest procés es pot obtenir un resultat més exacte.

A vegades, el resultat pot variar a causa de la posició en què es col·loquen les capses o a causa de la variació d'escala de les caixes (valors de r utilitzats).

6.2. MÈTODE PÍXEL

La realització d'aquest apartat ha estat possible gràcies a en Néstor Andreu, enginyer de telecomunicacions, que amablement em va concedir una entrevista.

Coneix algun altre mètode similar al Box-Counting que ens permeti calcular la dimensió de Hausdorff-Besicovitch d'un fractal?

Hi ha mètodes alternatius per poder calcular la dimensió de Hausdorff-Besicovitch, però tots s'acaben basant en el procediment del Box-Counting. Per exemple, hi ha un mètode que en lloc d'utilitzar caixes quadrades utilitza esferes i a partir del seu radi fa una estimació de la dimensió de l'objecte. Normalment, però, s'utilitza el Box-Counting.

Ja que el mètode Box-Counting és el de primera elecció, coneix algun programa informàtic que utilitzi aquest procediment per calcular la dimensió de Hausdorff-Besicovitch?

Segurament existeixen, però jo no en conec cap.

Doncs, sense utilitzar un programa informàtic que realitzi el Box-Counting, no hi hauria cap altra manera automatitzada de realitzar aquest procediment?

Se m'acut una idea que es basa una mica en el procediment del Box-Counting. En aquest procediment el que es fa és contar el nombre de caixes que cobreixen el contorn del fractal. Els programes d'edició d'imatges tenen una funció que conta el nombre de píxels de cada color existents a la imatge. Pots agafar el nombre de píxels del contorn de la imatge i utilitzar-ho com si fossin el nombre de caixes ocupades. Acaba sent el mateix procediment però automatitzat.

Gràcies a aquesta entrevista puc explicar un mètode alternatiu per calcular la dimensió de Hausdorff-Besicovitch. Aquest mètode que ara explicaré és el que normalment utilitzen els programes informàtics.

La idea bàsica del Box-Counting és delimitar el contorn del fractal per poder veure quin espai ocupa. Per fer-ho, utilitzem normalment caixes com a mesura i contem quantes caixes són necessàries per cobrir el seu contorn.

Si agaféssim una imatge d'un fractal i reduïssim el seu contorn a un sol color, podríem fer un procediment semblant al Box-Counting utilitzant píxels. En aquest cas, les caixes que són necessàries per omplir el contorn del fractal serien els píxels que hi ha en aquella imatge del color triat pel contorn. El procediment seguiria sent el mateix que en el Box-Counting. A continuació fariem una gràfica i el pendent de la recta seria la dimensió fractal.

Aquest procediment permetria automatitzar el procés de contar caixes. No les hem de contar manualment perquè ja ens conta els píxels (caixes) el programa utilitzat.

Utilitzant aquest mètode, teòricament, hauríem d'obtenir més precisió en el resultat que amb el Box-Counting, ja que podem arribar a un factor escala més gran. Com que aquest procés es fa automàticament, pots arribar a contar més números de caixes i per tant delimitar millor el contorn del fractal.

Una diferència amb el Box-Counting seria que el nombre de caixes funcionaria a l'inrevés. En el Box-Counting el nombre de caixes és més alt com més petit és el factor escala de la graella, ja que reduïm la mida de la graella i per tant surten més caixes a contar. En el mètode píxel el nombre de caixes és més alt com més ampliada tenim la imatge, ja que si l'ampliem molt, obtenim més píxels del contorn. En aquest cas, com que els factors escala no són fraccions, ja que ampliem la imatge i no la reduïm, i per tal de mantenir els mateixos resultats, en lloc de $\log \frac{1}{r}$ en la fórmula hauríem de posar $\log r$. Per tant, la fórmula que ens quedaria i que hem d'utilitzar amb el mètode píxel és $d = \frac{\log N(r)}{\log r}$.

7. DIMENSIÓ DE HAUSDORFF-BESICOVITCH D'UN FRACTAL

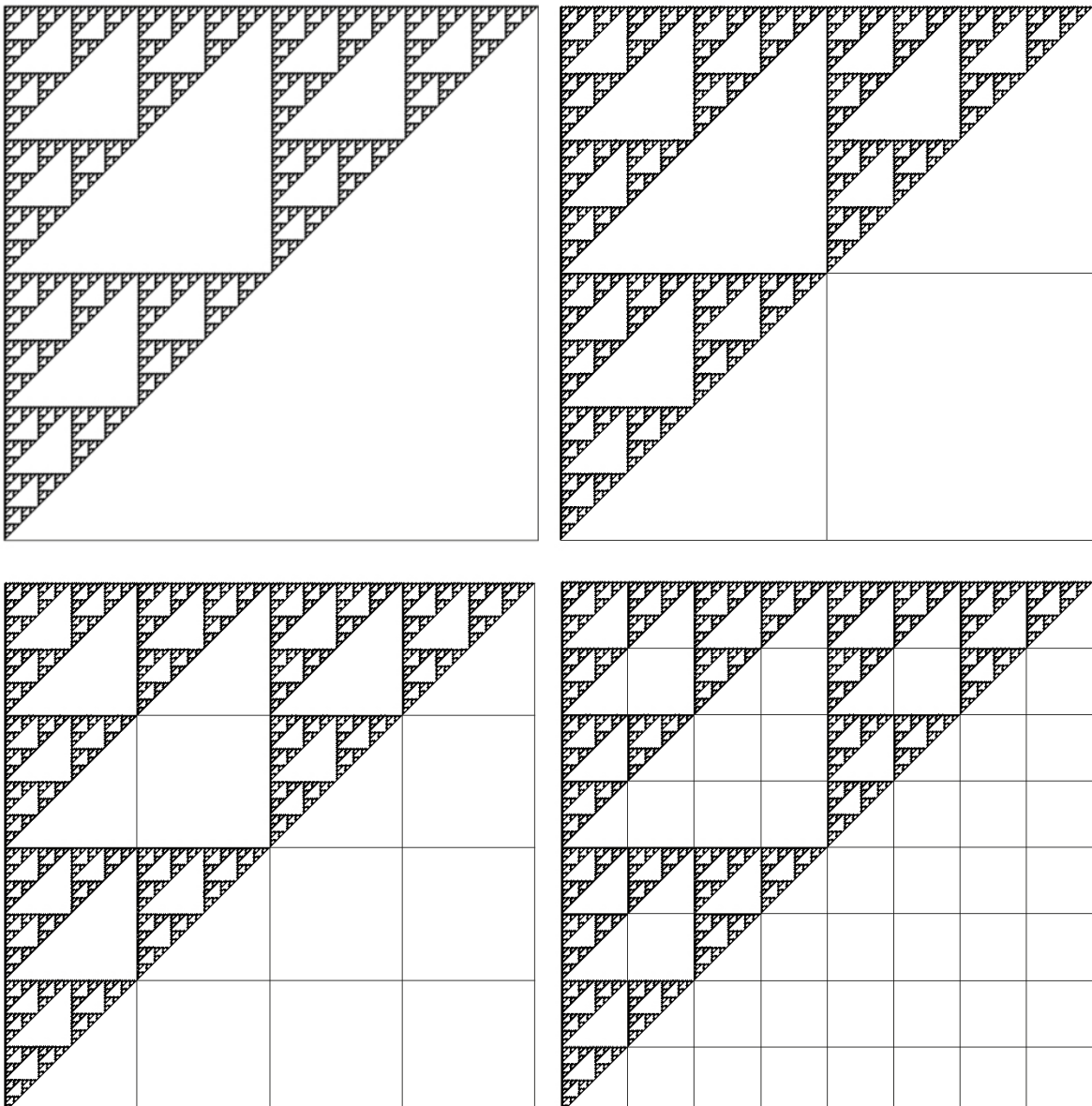
7.1. MITJANÇANT LA TÈCNICA BOX-COUNTING

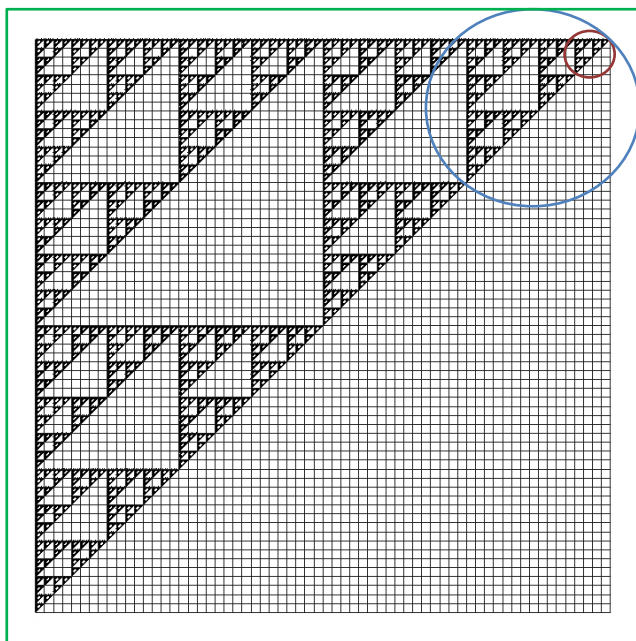
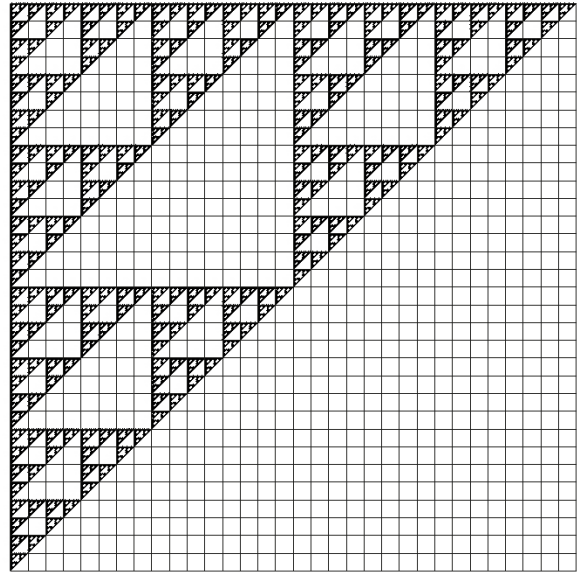
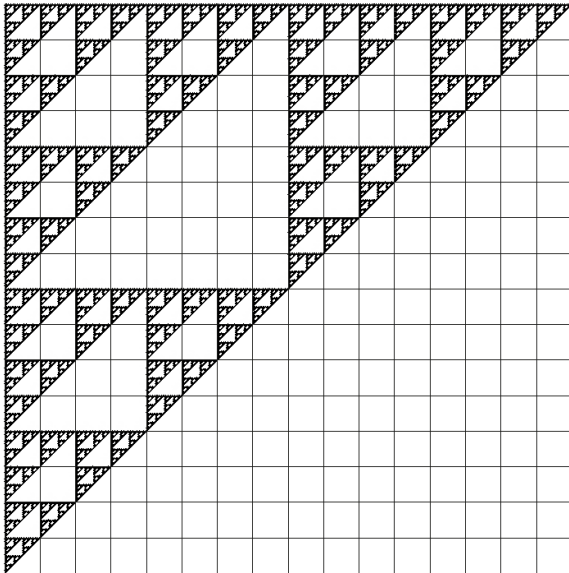
Per poder demostrar la tècnica explicada en l'apartat anterior he calculat manualment amb el mètode del Box-Counting la dimensió del fractal *Triangle de Sierpinski*.

El primer pas és crear les capses o graella que utilitzarem en el procés. Per crear-les he utilitzat el programa "Corel DRAW X6", un programa de dibuix i gràfiques.

L'escala de reducció que utilitzam es va dividint entre dos. Per tant, a la segona graella l'escala és $\frac{1}{2}$, a la tercera $\frac{1}{4}$ i així progressivament.

Una vegada creades les gràfiques cobrim amb elles el *Triangle de Sierpinski*. Les gràfiques són les següents:





Número de capsas: 9

Número de triangles vermells: 9

Número de triangles blaus: 9

Dedució del número de caixes de la graella
factor escala $\frac{1}{64}$:

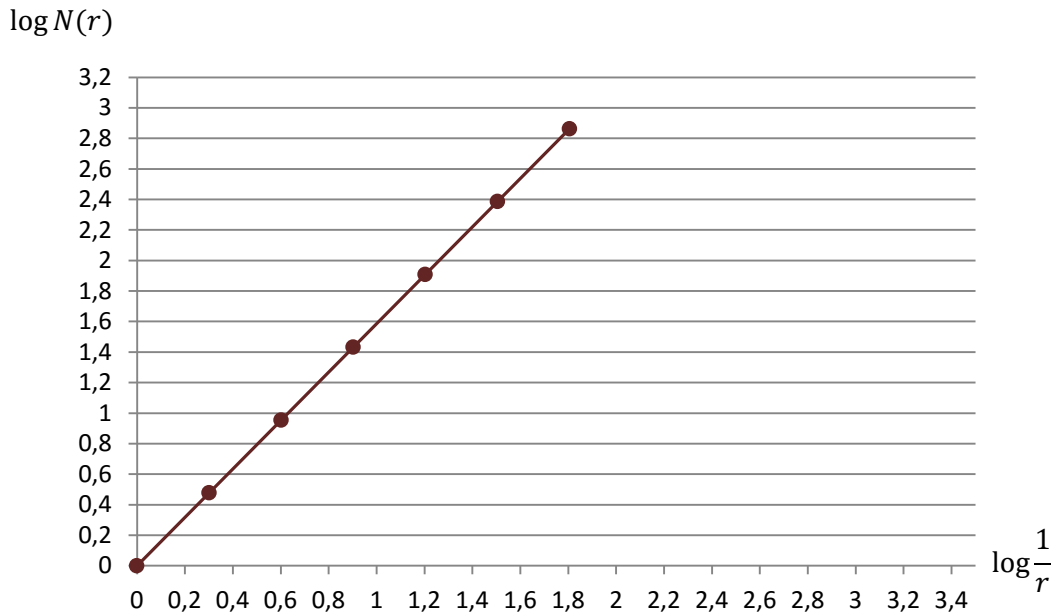
$$9 \times 9 \times 9 = 729$$

Si contem a cada gràfica el nombre de capsas que ocupa el contorn del Triangle de Sierpinski obtenim els resultats que he recollit a la taula següent:

	N(r)	r
Gràfica 1	1	1
Gràfica 2	3	$\frac{1}{2}$
Gràfica 3	9	$\frac{1}{4}$
Gràfica 4	27	$\frac{1}{8}$
Gràfica 5	81	$\frac{1}{16}$
Gràfica 6	243	$\frac{1}{32}$
Gràfica 7	729	$\frac{1}{64}$

En la taula, $N(r)$ representa el nombre de caixes ocupades i r el factor escala utilitzat a cada gràfica.

Amb aquests resultats he elaborat la gràfica següent:



Per trobar la dimensió de Hausdorff-Besicovitch primer cal trobar el pendent de la gràfica:

$$m = \tan \alpha = \frac{\log 729}{\log \frac{1}{\frac{1}{64}}} = 1,584 \dots$$

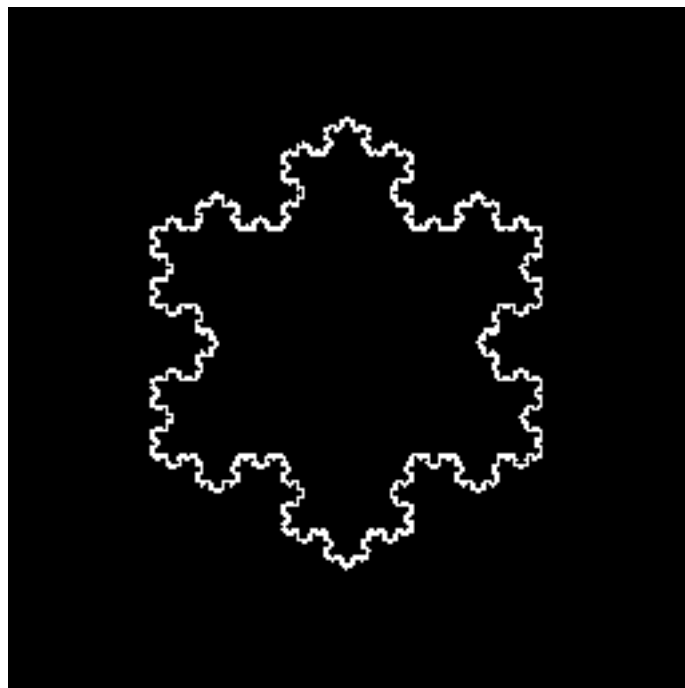
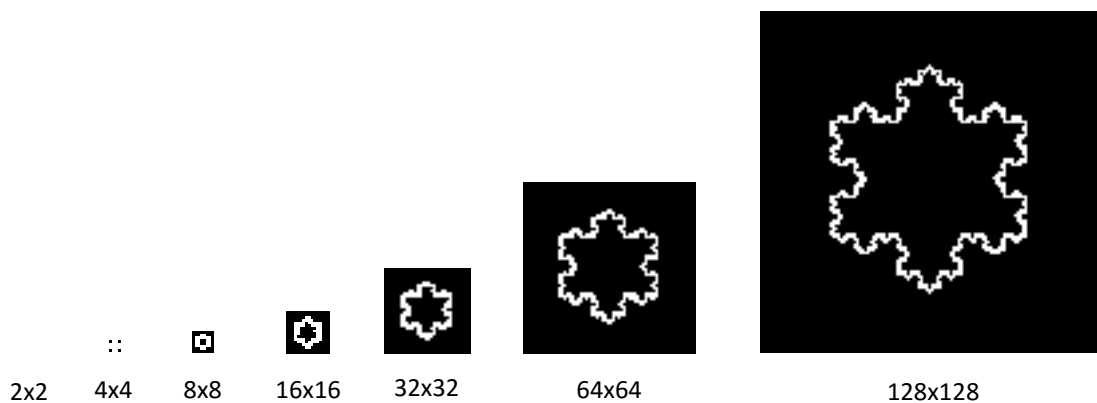
En aquest cas, com que el Triangle de Sierpinski és una fractal que té autosimilitud exacta, el resultat és idèntic al que hauria de ser i no varia perquè haguem utilitzat la tècnica del Box-Counting.

La dimensió de Hausdorff-Besicovitch del Triangle de Sierpinski és 1,584.

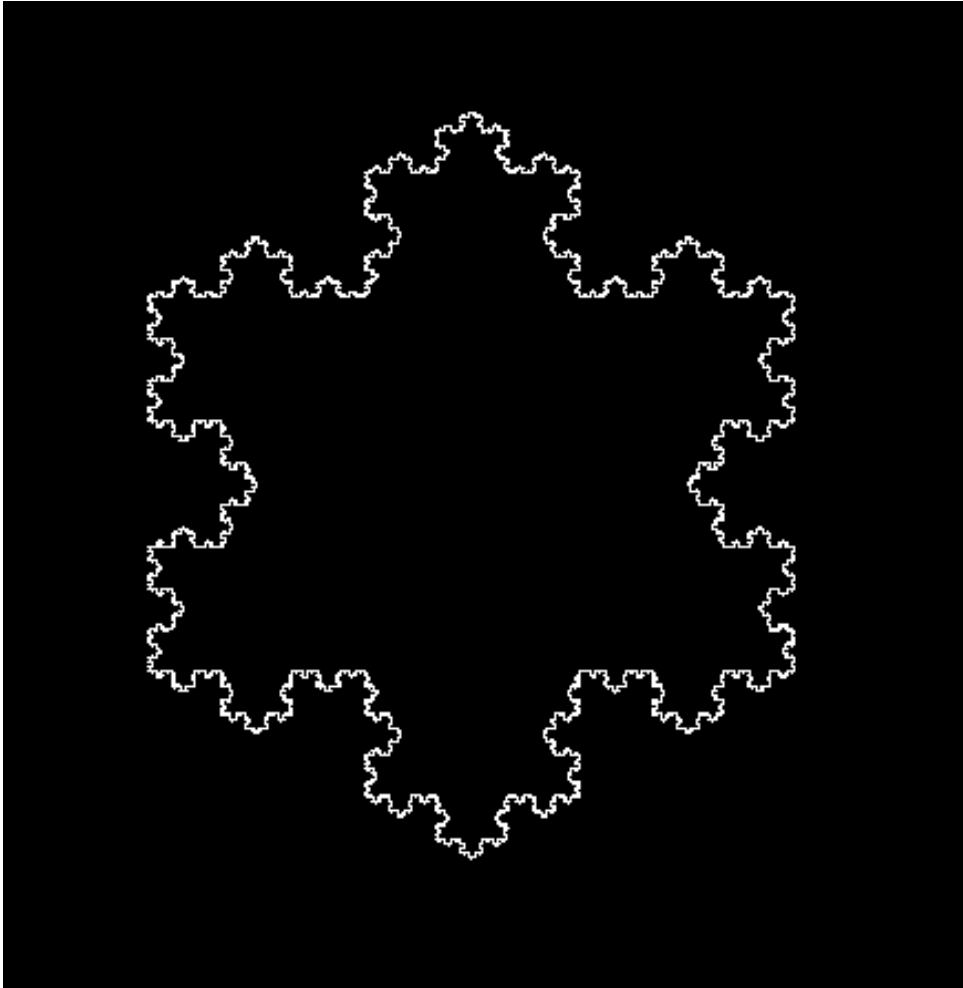
7.2. MITJANÇANT LA TÈCNICA PÍXEL

Per poder demostrar la tècnica explicada en l'apartat anterior he calculat amb el mètode píxel la dimensió del fractal *Floc de Koch*.

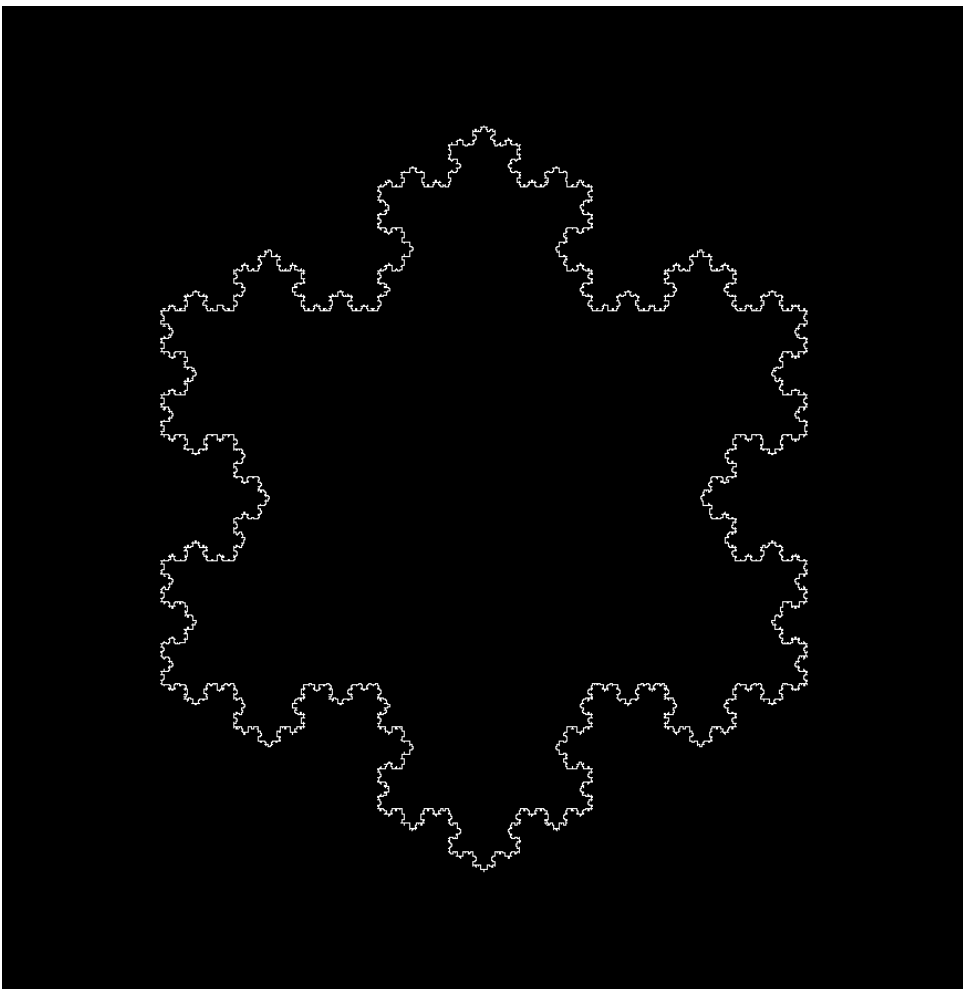
Per aquesta tècnica cal tenir el fractal en només dos colors. Per reduir la imatge a dos colors he utilitzat el programa "GIMP". He escollit tenir el contorn del fractal de color blanc i el fons negre. Una vegada tenim el floc de Koch en blanc i negre, ampliem la imatge a diferents mides. Les imatges i les mides que obtingut són les següents:



256x256

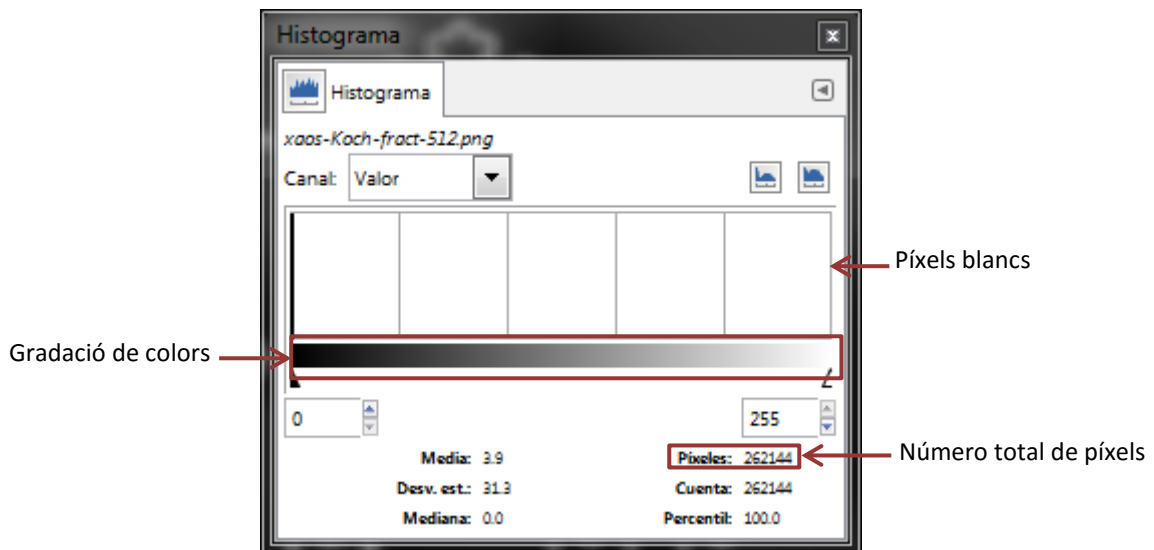


512x512



1024x1024

En aquest cas, en lloc de contar caixes, hem de mirar l'histograma de colors del programa "GIMP". L'histograma ens indica la quantitat de píxels que hi ha a la imatge de cada color. En aquest cas, com que hem reduït la imatge només a dos colors, la barra del color blanc coincidirà amb el nombre de píxels del contorn del fractal. L'histograma ens indica també el nombre total de píxels que hi ha a la imatge



Histograma de colors del programa GIMP ³⁶

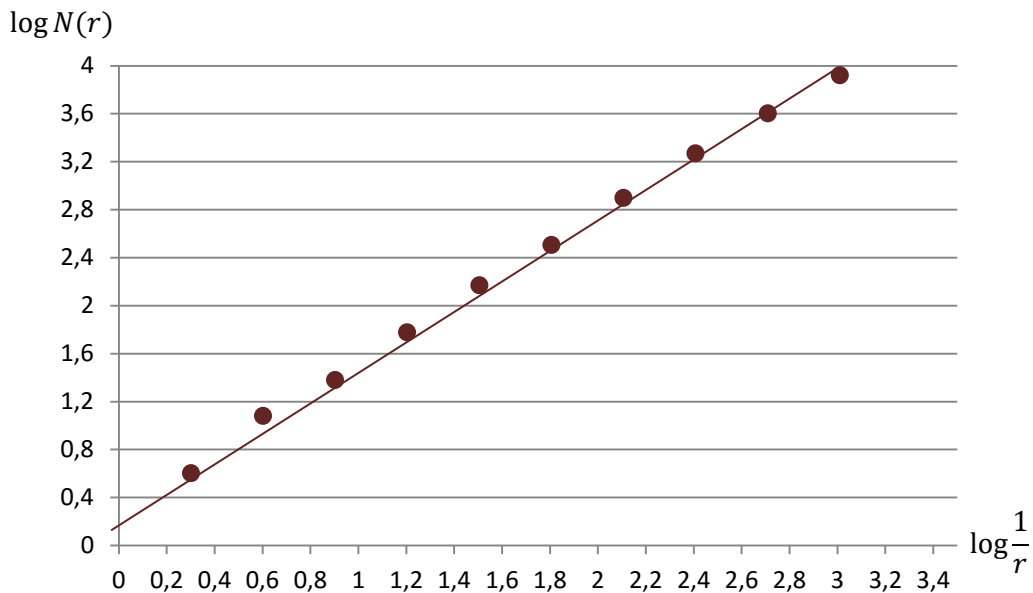
He recollit els resultats en la taula següent:

Mida de la imatge	Píxeles Blancs (N(r))	Factor escala (r)
1024x1024	8338	1024
512x512	4006	512
256x256	1853	256
128x128	788	128
64x64	320	64
32x32	148	32
16x16	60	16
8x8	24	8
4x4	12	4
2x2	4	2

³⁶ Captura de pantalla del ordinador

A partir d'aquí el procediment és el mateix: cal elaborar una gràfica on l'eix Y sigui el logaritme del nombre de píxels blancs ($\log N(r)$) i l'eix X el logaritme del factor escala ($\log r$).

La gràfica elaborada és la següent:



Per trobar la dimensió de Hausdorff-Besicovitch cal trobar el pendent de la línia que millor uneix els diferents punts.

$$m = \tan \alpha = \frac{3,92 - 0,1}{3,01} = 1,269 \dots$$

La dimensió fractal que he obtingut és 1,269 mentre que la real és 1,261. El resultat es diferencia només en un 0,008 de l'esperat. Per tant, tot i no ser un resultat idèntic al vertader, podem dir que es tracta d'una bona aproximació.

7.3. COMPARATIVA: BOX-COUNTING/PÍXEL

Aquests dos mètodes són els que aplicaré a la meua part pràctica. Per tal de sintetitzar les característiques de les dues tècniques, el següent quadre les compara i les resumeix.

	Box-Counting	Mètode píxel
Fórmula	$d = \frac{\log N(r)}{\log \frac{1}{r}}$	$d = \frac{\log N(r)}{\log r}$
Factor escala	De reducció	D'ampliació
Càlcul de la dimensió fractal	Pendent de la línia	Pendent de la línia
Precisió segons els exemples que he realitzat	+++	+

8. INTRODUCCIÓ AL DESENVOLUPAMENT TUMORAL

Tumor indica massa, bony o augment de la mida d'un territori orgànic d'origen neoplàstic³⁷ o no neoplàstic. Tot i que els tumors poden originar-se de manera no neoplàstica, com per exemple per un procés inflamatori, el més habitual és que s'hagin originat a causa de la formació d'un nou teixit. Per aquest motiu, quan parlem de tumor donem per entès que s'aplica a una neoplàsia.

8.1. COM ES FORMA UN TUMOR?

El control de la divisió cel·lular és un aspecte essencial per a la preservació de les funcions dels òrgans i sistemes. En conseqüència, les cèl·lules disposen de mecanismes de control. Quan el procés es desequilibra i el nombre de cèl·lules neoplàstiques supera el nombre de cèl·lules mortes es produeix un tumor. Per tant, un tumor és la conseqüència a l'alteració de l'equilibri del procés de divisió i mort cel·lular.

Existeixen diferents mecanismes d'alteracions en el procés de divisió cel·lular, però els més habituals són els causats per alteracions en els proto-oncogens o en els gens supressors de tumors.

Els proto-oncogens són gens promotors del cicle cel·lular: creixement i divisió de la cèl·lula. Una mutació en qualsevol d'aquests gens causaria una activació de la divisió cel·lular, que provocaria un excés de cèl·lules neoplàstiques.

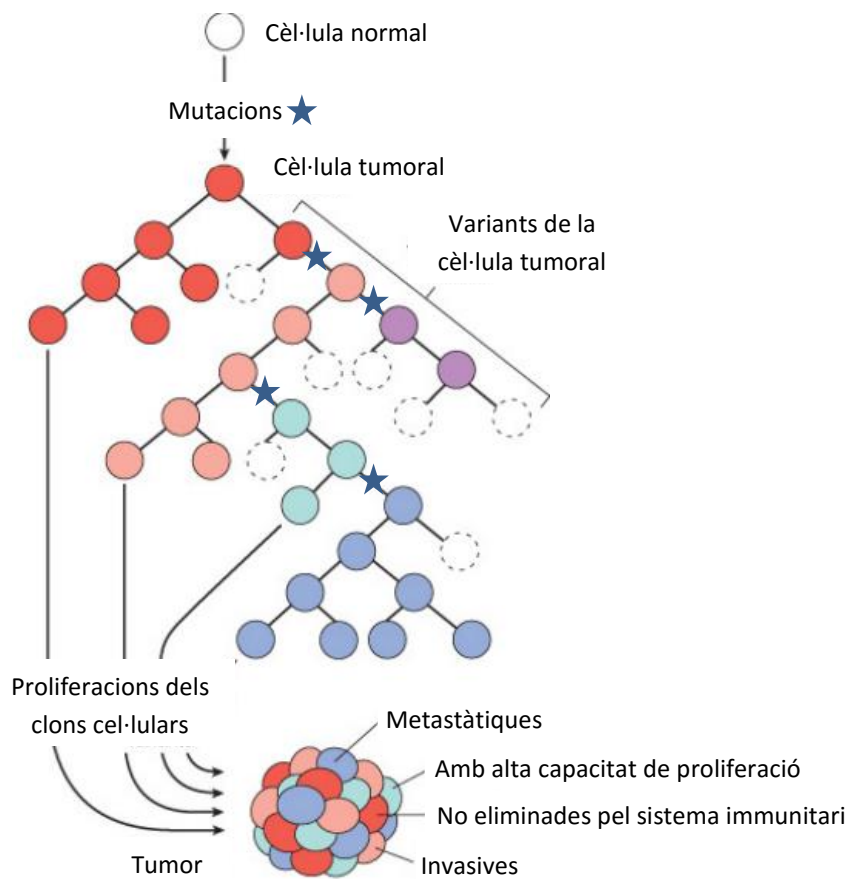
Els gens supressors codifiquen proteïnes que inhibeixen³⁸ la proliferació cel·lular. La seva pèrdua funcional, causada per una mutació, dona lloc a què la cèl·lula proliferi amb més facilitat i per tant pugui crear més cèl·lules neoplàstiques.

Després d'una mutació es genera un clon inicial de cèl·lules amb la mutació, de manera que el creixement de cèl·lules mutades augmenta ràpidament. En aquest moment, el conjunt de cèl·lules neoplàstiques, pot evolucionar de diverses maneres:

³⁷ Relatiu o pertanyent a la neoplàsia.

³⁸ Impedir (a algú o en aquest cas al gen) d'intervenir en alguna cosa.

1. Per acció del sistema immunitari de l'organisme, el conjunt de cèl·lules alterades són eliminades i només romanen les cèl·lules normals. El tumor no s'arribarà a desenvolupar.
2. Les cèl·lules alterades aturen el seu creixement però no desapareixen. És el que podem anomenar tumor "adormit".
3. Les cèl·lules mutades no són eliminades pel sistema immunitari i segueixen proliferant i adquirint noves mutacions degudes a l'alta taxa de proliferació. Aquestes mutacions originarien els diferents clons cel·lulars que formaran el tumor. Cada grup cel·lular presenta diferents característiques, com per exemple la capacitat d'invasió. El tumor queda format per cèl·lules amb diferents característiques. Depèn de com siguin aquestes característiques podrem classificar el tumor de dues maneres, com veurem al següent apartat.



Desenvolupament tumoral³⁹

³⁹ Imatge basada en el llibre: TANNOCK, IF. *Biology of tumor growth*. 1983.

9. DIAGNÒSTIC ANATOMOPATOLÒGIC⁴⁰ DE BENIGNITAT I MALIGNITAT

El concepte de benignitat i malignitat fa referència al comportament biològic general d'una neoplàsia, és a dir, a la capacitat d'un tumor de causar malaltia greu o mort deixat a la seva lliure evolució. D'aquesta manera, classifiquem les neoplàsies benignes com aquelles que no impliquen amenaça per a la salut del pacient i les neoplàsies malignes com aquelles que poden causar alteracions en el benestar del pacient i fins i tot mort. Aquestes últimes reben el nom de càncer.

Per classificar-les cal estudiar les seves característiques macroscòpiques i microscòpiques. Durant els anys, s'han pogut elaborar un seguit de criteris que ens poden ajudar a realitzar prediccions de la seva evolució, és a dir, del seu comportament. A continuació, s'expliquen alguns d'aquests criteris. El subapartat següent es centra en les característiques que després seran útils i aplicables a la meua part pràctica, i més endavant explicaré la seva relació amb la geometria fractal.

9.1 CARACTERÍSTIQUES DE BENIGNITAT I MALIGNITAT TUMORAL

	TUMOR BENIGNE	TUMOR MALIGNNE
Mesures del tumor	+	+++
Característiques dels marges	Marges expansius: tumors ben delimitats i amb marges ben definits	Marges infiltratius: tumors mal delimitats i amb marges mal definits
Ritme de creixement	Creixen habitualment de forma lenta.	Creixen, en general, de forma més ràpida que els tumors benignes. El ritme de creixement dels tumors malignes pot variar segons el grau d'agressivitat: els més agressius creixen ràpidament mentre que els de baixa agressivitat ho fan de forma més lenta.

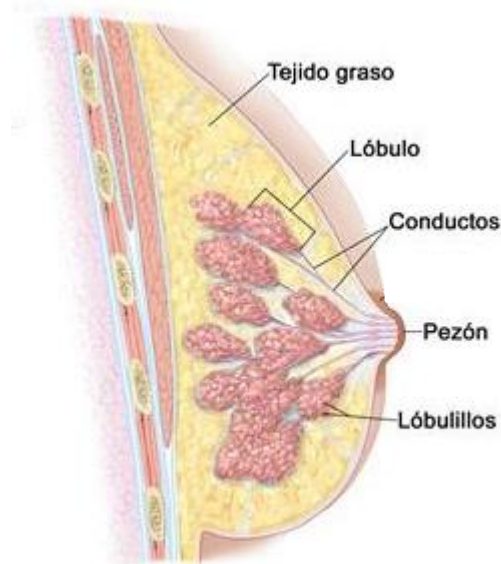
⁴⁰ Que estudia la forma i les característiques del teixit que causen la malaltia.

Tot i que aquests solen ser els criteris més generalitzats, existeixen excepcions. Molts tumors benignes poden arribar a una mida extraordinàriament gran perquè el seu creixement no es veu condicionat per cap símptoma. Una altra excepció a aquests criteris seria el carcinoma renal⁴¹ de cèl·lules clares: tumor maligne que macroscòpicament presenta límits bastants nets i definits.

⁴¹ Càncer que afecta a les cèl·lules del ronyó

10. CÀNCER DE MAMA

El càncer de mama és un tumor maligne desenvolupat a la zona de la glàndula mamària. Principalment s'origina a les cèl·lules lobulars (situades en les glàndules productores de llet) o en els conductes que transporten la llet del lòbul al mugró.



Anatomia de la glàndula mamària⁴²

El càncer de mama és el més comú entre dones arreu del món i és la primera causa de mort de càncer en dones espanyoles. Per aquest motiu és un dels càncers més estudiats. Alguns factors de risc com la raça, l'edat, el tabaquisme, el consum d'alcohol o factors genètics poden facilitar el desenvolupament d'aquest tipus de tumor.

Per poder detectar un tumor a la glàndula mamària en un estadi primari s'utilitza la mamografia. Aquest tipus d'imatge mèdica utilitza un sistema de petites dosis de raigs X per poder visualitzar l'interior de la mama. Per tant, l'accés a una imatge del tumor és fàcil d'aconseguir.

⁴² Imatge extreta d'Internet: <http://3.bp.blogspot.com/-dixRZCKjF28/URWDIGi7smI/AAAAAAAAAP4/AeCAT0tcl4/s1600/Anatom%25C3%25Ad-a-de-los-senos.jpg>

Els tumors de mama tendeixen a no tenir tantes excepcions com altres càncers: solen tenir les característiques de benignitat i malignitat ja establertes. Per tant, en el meu treball generalitzaré que en el càncer de mama els tumors benignes tenen marges expansius i els malignes marges infiltratius.

A causa d'aquestes característiques el càncer de mama és adequat per l'estudi fractal.

11. ANÀLISI FRACTAL DEL COMPORTAMENT D'UN TUMOR DE MAMA

Estudis realitzats principalment als Estats Units han pogut relacionar la geometria fractal amb l'anàlisi prematur del comportament d'un tumor. Identificar i extirpar un tumor maligne en les primeres fases d'evolució és un aspecte clau per a poder aturar el procés de metàstasi⁴³ i reduir el risc de mort en el pacient.

L'objectiu d'aquest apartat és, amb els coneixements adquirits en la part teòrica, demostrar i establir la relació entre el valor de la dimensió fractal del contorn d'un tumor i el seu comportament. D'aquesta manera, i gràcies al diagnòstic per imatge, podem distingir entre tumor benigne i tumor maligne. L'estudi que he realitzat és el següent.

11.1. HIPÒTESI

- Els tumors benignes tenen una dimensió fractal inferior als tumors malignes

11.2. METODOLOGIA

A) Imatges digitals: mamografies

L'estudi realitzat està format per 18 mamografies: 12 d'elles contenen un tumor benigne i les altres 6 un tumor maligne. Les mamografies (i el seu diagnòstic de malignitat o benignitat) m'han estat proporcionades per l'institut de recerca ViCOROB de la universitat de Girona, el qual té una línia d'investigació dedicada a l'optimització dels mètodes d'anàlisi d'imatges mèdiques.

Per calcular la dimensió fractal del tumor cal obtenir-ne una imatge on només aparegui la línia del contorn. L'institut ViCOROB em va proporcionar:

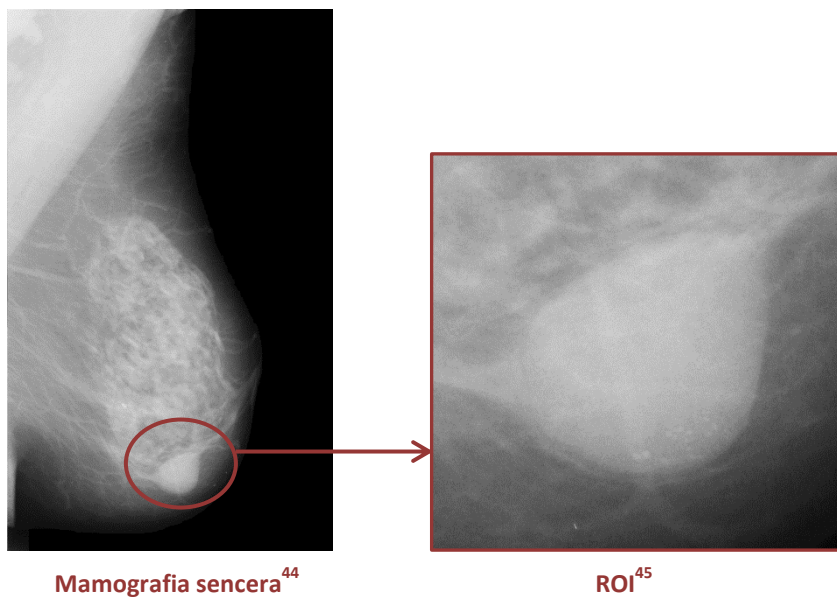
- Mamografia sencera
- Regió d'interès (ROI)
- Imatge a dos colors dels tumors

⁴³ Procés patològic, infecció o tumoral, en algun punt de l'organisme, que apareix com a resultat de la translació d'un procés idèntic preexistent en algun altre lloc no contigu.

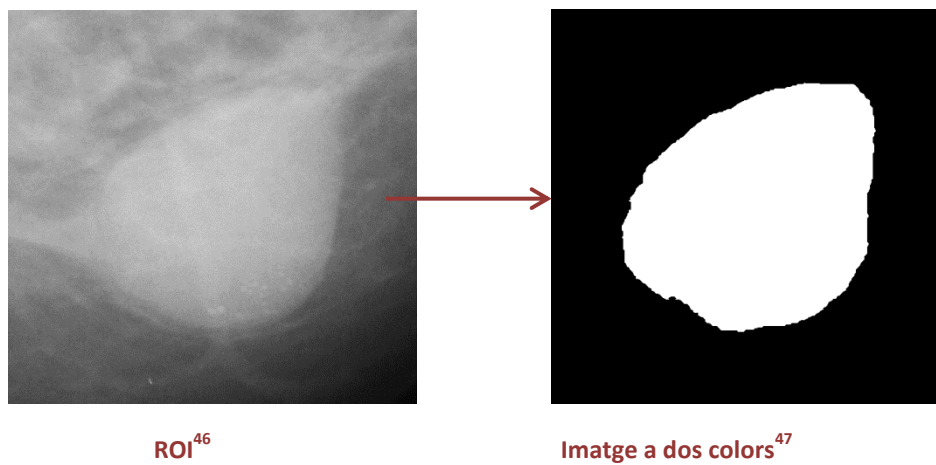
Aquestes tres imatges van ser realitzades a ordinador per un radiòleg especialista. Detectar exactament quina part del mamografia forma part del tumor és una feina molt difícil on has de tenir un domini i un coneixement previ.

El procediment general per obtenir aquestes imatges seria el següent:

- Determinació de la regió d'interès (ROI): seleccionar i extreure el tumor de la mamografia deixant uns marges a la perifèria de la neoplàsia.

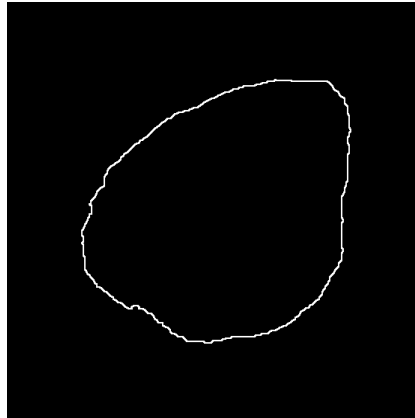


- Obtenció de la imatge a dos colors del tumor:



^{44/45/46/47} Imatges proporcionades per l'institut ViCOROB.

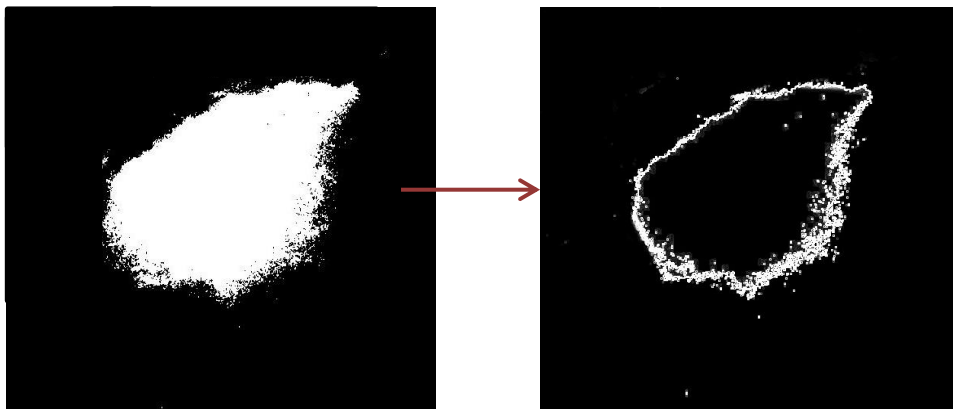
- Detecció del contorn: per obtenir la línia de contorn cal tractar el dibuix amb un editor d'imatges. Aquesta part no m'ha estat proporcionat per l'institut ViCOROB i per tant l'he realitzat amb el programa GIMP. He triat la línia de color blanc i el fons negre. Si fes falta, amb el mateix programa es poden invertir els colors.



Contorn del tumor⁴⁸

Aquesta seria la imatge final que caldria utilitzar per realitzar l'anàlisi fractal.

Tot i que finalment he utilitzat les imatges tractades per l'especialista, també he intentat reproduir el procediment partint de la ROI. Per obtenir la imatge a dos colors del tumor he utilitzat un programa desenvolupat per l'enginyera de telecomunicacions Cristina Diéguez, a qui li havia realitzat una entrevista anteriorment.



Imatge a dos colors⁴⁹

Contorn del tumor⁵⁰

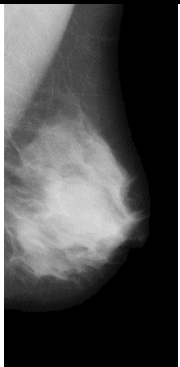
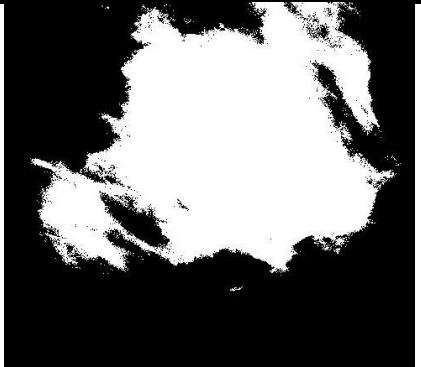

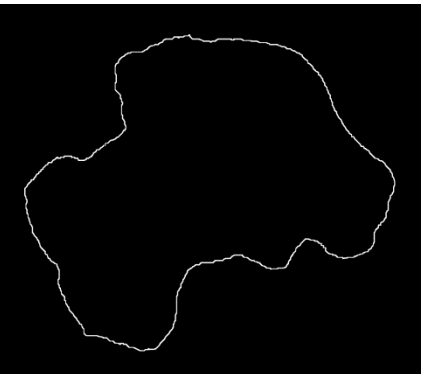
⁴⁸ Imatge pròpia obtinguda amb el GIMP
^{49/50} Imatges pròpies

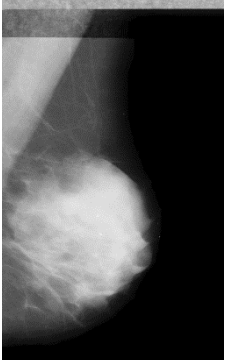



Per tant, tot i que puc obtenir un dibuix del contorn del tumor mai serà tan precís o correcte com el d'un especialista. És per aquest motiu que les imatges del meu treball són les del contorn obtingut amb el GIMP a partir de les imatges de l'especialista.

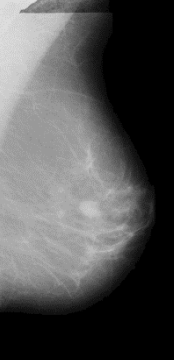


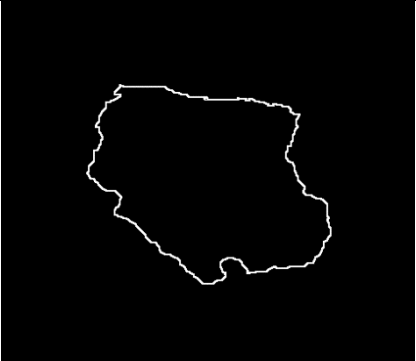
Les imatges cal que tinguin la mateixa mida i el mateix gruix de contorn, per a que no influeixi aquests aspectes en el resultat. El gruix de les meves imatges és de 1 píxel i la mida de 600 x (varia depèn de la imatge). El programa que he utilitzat per calcular la dimensió fractal fa servir el mètode píxel. Per tant, si la mida de la imatge és superior també ho serà la dimensió fractal.

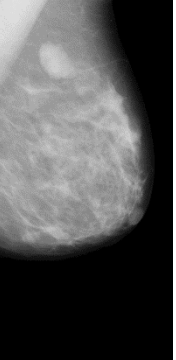
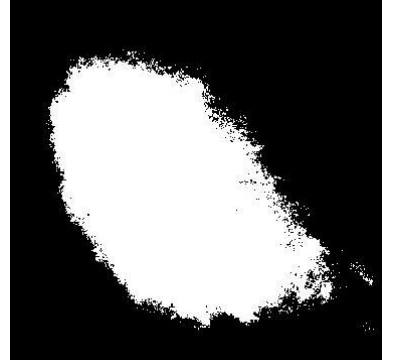

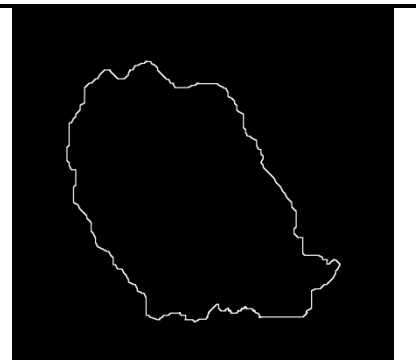
A continuació hi ha les taules on estan recollides totes les imatges ja tractades. Per a ordenar-les he utilitzat una nomenclatura on posa si és maligna o benigne i el número de mamografia. Per exemple: B.01 seria la primera mamografia benigna i M.01 la primera mamografia maligna. Per a cada taula hi ha la mamografia original, el dibuix que he obtingut de fer jo el procediment, la ROI que em va ser proporcionada pel VICOROB i la imatge només amb contorn, que és la que utilitzaré per calcular la dimensió fractal.

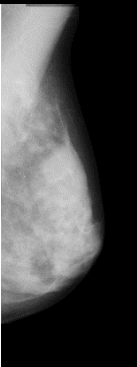
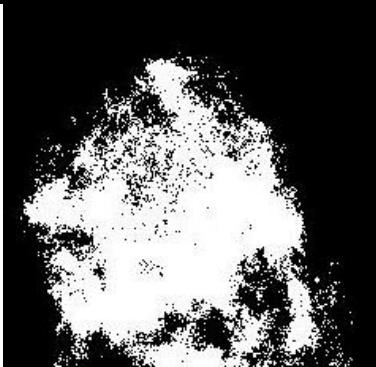

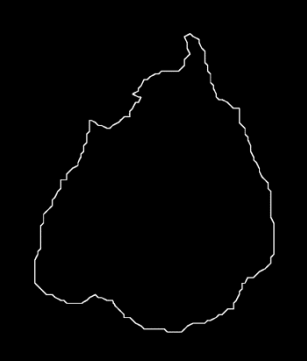
PROCESSAMENT DE LES MAMOGRAFIES

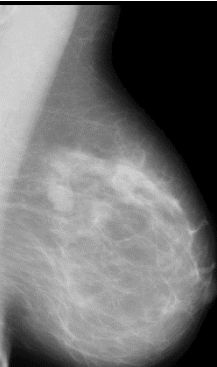
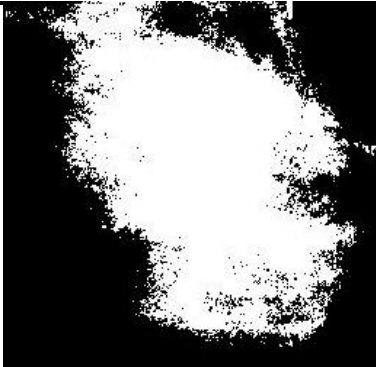
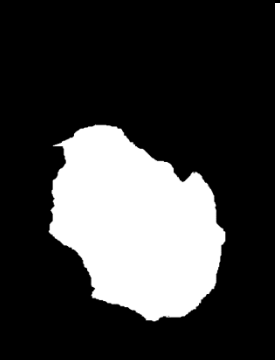
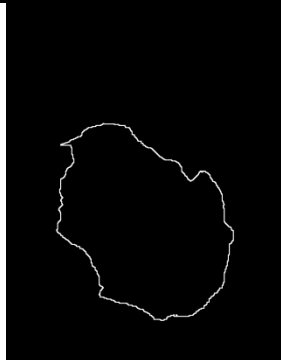
B.01	
Mamografia real	Imatge a dos colors
	
Imatge realitzada per un especialista	Contorn del tumor
	




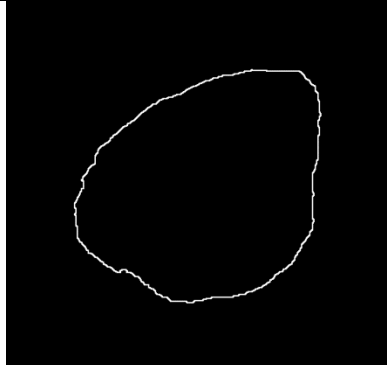
B.02	
Mamografia real	Imatge a dos colors
	
Imatge realitzada per un especialista	Contorn del tumor
	


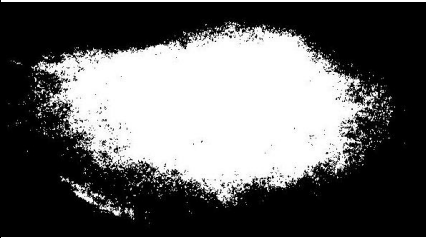


B.03	
Mamografia real	Imatge a dos colors
	
Imatge realitzada per un especialista	Contorn del tumor
	

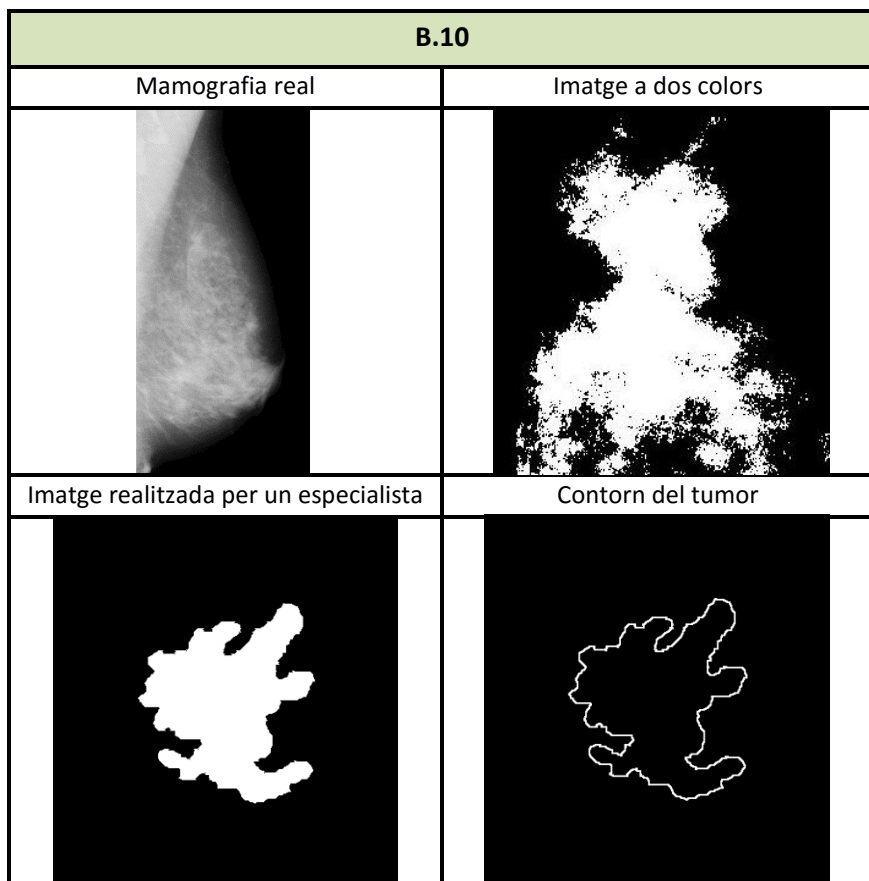
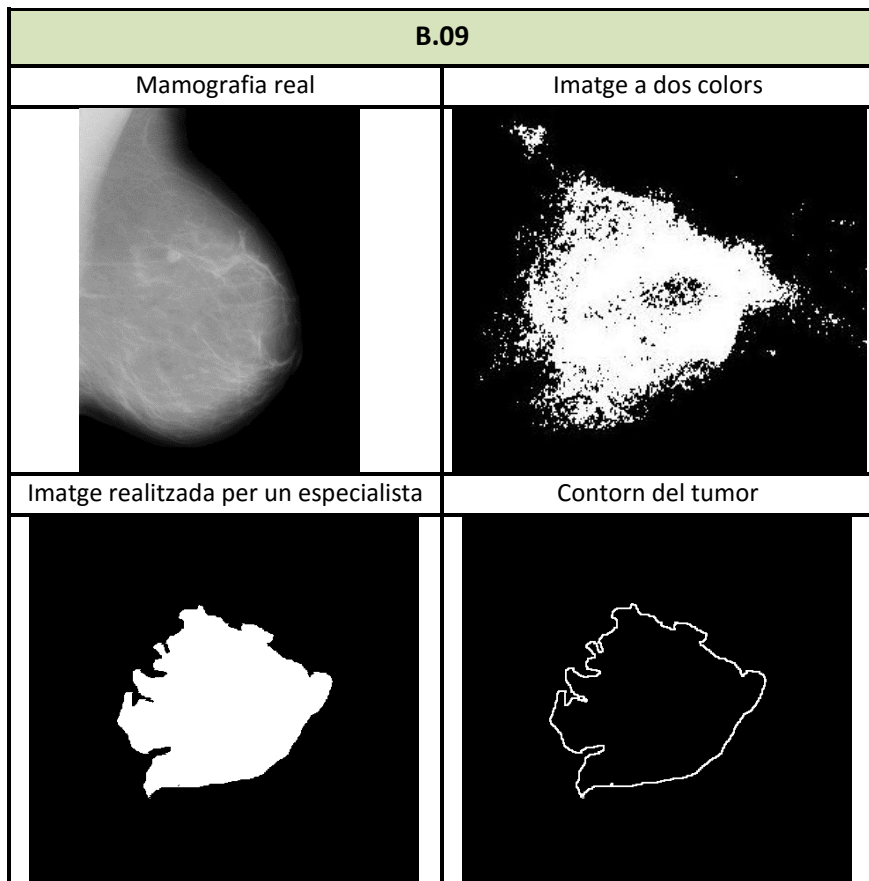
B.04	
Mamografia real	Imatge a dos colors
	
Imatge realitzada per un especialista	Contorn del tumor
	




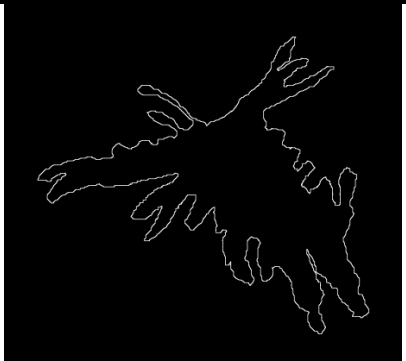
B.05	
Mamografia real	Imatge a dos colors
	
Imatge realitzada per un especialista	Contorn del tumor
	




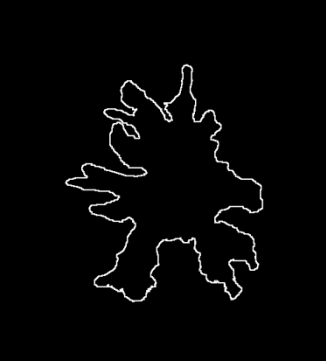
B.06	
Mamografia real	Imatge a dos colors
	
Imatge realitzada per un especialista	Contorn del tumor
	

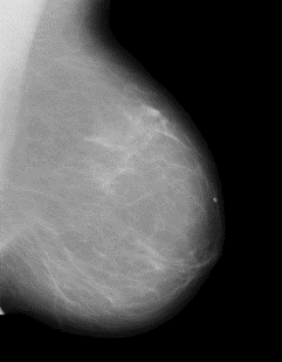
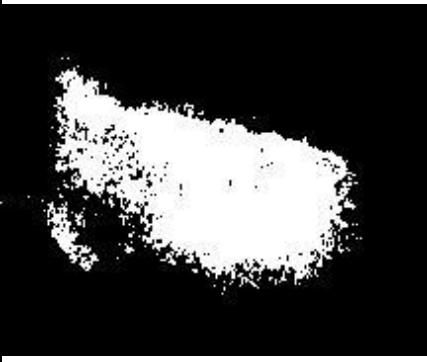

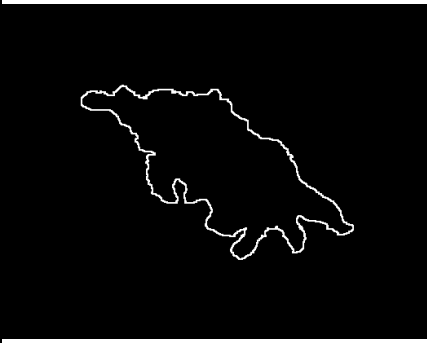
B.07	
Mamografia real	Imatge a dos colors
	
Imatge realitzada per un especialista	Contorn del tumor
	

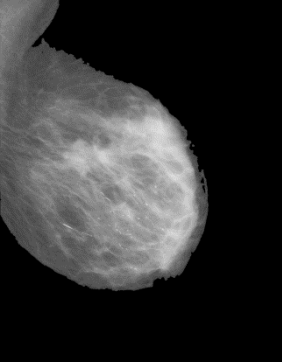
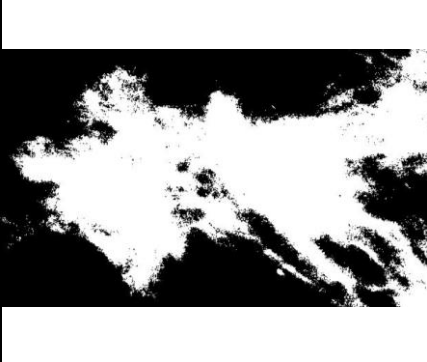

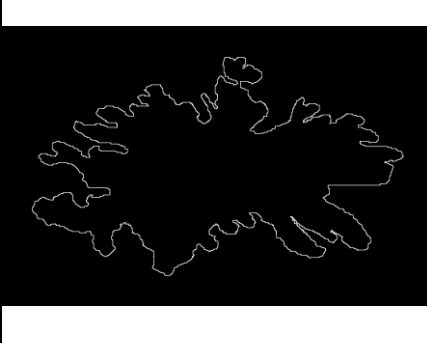
B.08	
Mamografia real	Imatge a dos colors
	
Imatge realitzada per un especialista	Contorn del tumor
	

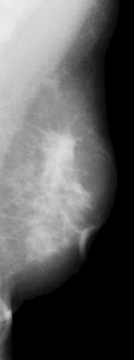
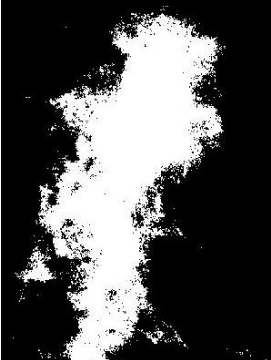

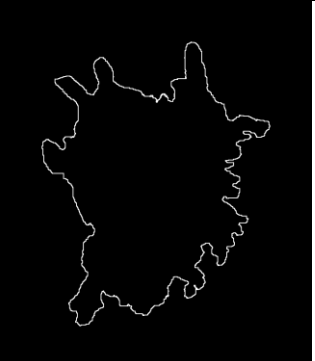


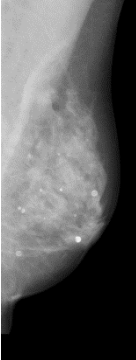
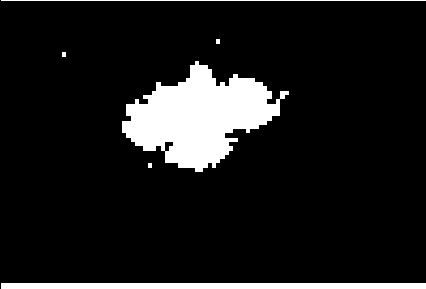

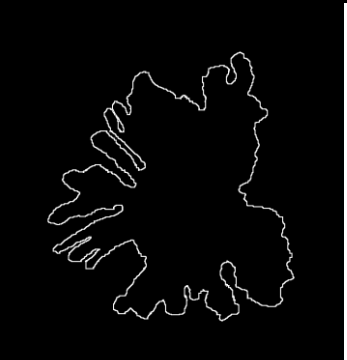
B.11	
Mamografia real	Imatge a dos colors
	
Imatge realitzada per un especialista	Contorn del tumor
	


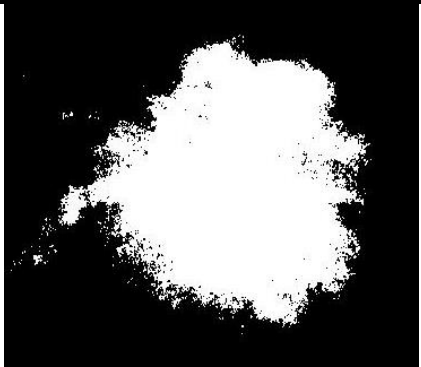

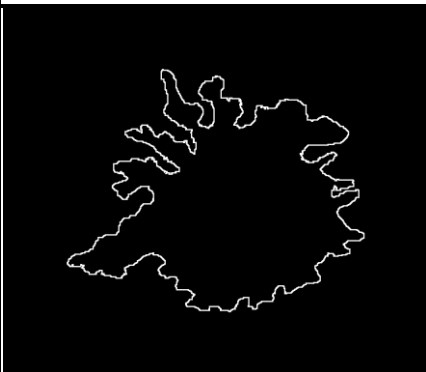
B.12	
Mamografia real	Imatge a dos colors
	
Imatge realitzada per un especialista	Contorn del tumor
	


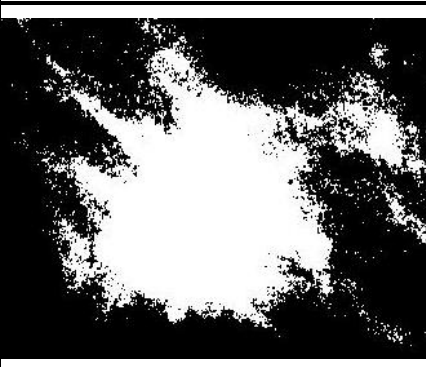
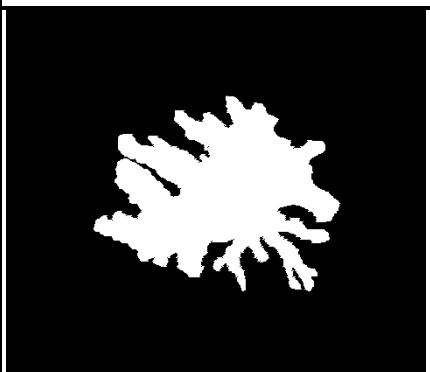
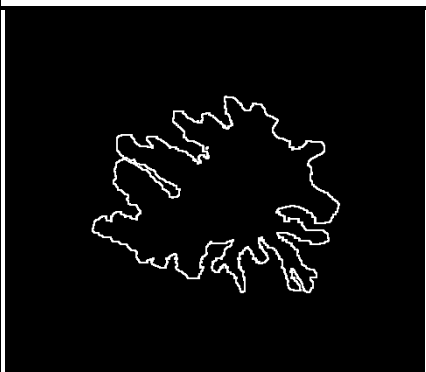
M.01	
Mamografia real	Imatge a dos colors
	
Imatge realitzada per un especialista	Contorn del tumor
	

M.02	
Mamografia real	Imatge a dos colors
	
Imatge realitzada per un especialista	Contorn del tumor
	

M.03	
Mamografia real	Imatge a dos colors
	
Imatge realitzada per un especialista	Contorn del tumor
	

M.04	
Mamografia real	Imatge a dos colors
	
Imatge realitzada per un especialista	Contorn del tumor
	

M.05	
Mamografia real	Imatge a dos colors
	
Imatge realitzada per un especialista	Contorn del tumor
	

M.06	
Mamografia real	Imatge a dos colors
	
Imatge realitzada per un especialista	Contorn del tumor
	

B) Procediment

He calculat la dimensió fractal de tots els tumors amb el programa MatLab. Al MatLab cal introduir les instruccions d'un algoritme que conta els píxels del color del contorn. Aquests píxels serien l'equivalent a les capses del Box-Counting que recobreixen el contorn. A continuació, el programa fa la gràfica entre $\log N(r)/\log \frac{1}{r}$ i ens retorna el pendent de la línia, és a dir, la dimensió fractal.

Les instruccions que cal introduir, i que he extret d'internet⁵¹, són:

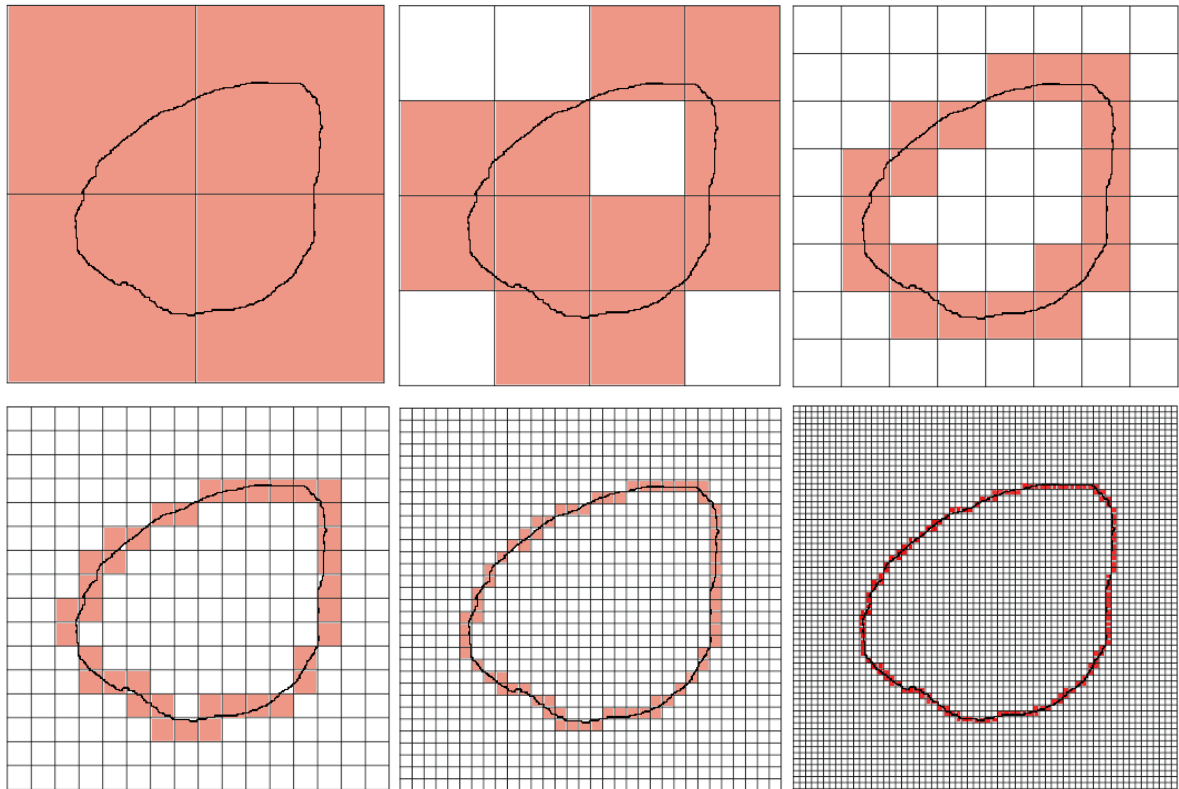
```
% HAUSDIM Returns the Hausdorff fractal dimension of an object
represented by
% a binary image.
% Returns the Hausdorff fractal dimension D of an object
represented by the
% binary image I. Nonzero pixels belong to an object and 0 pixels
% constitute the background.
%
% Algorithm
% -----
% 1 - Pad the image with background pixels so that its dimensions
are a
% power of 2.
% 2 - Set the box size 'e' to the size of the image.
% 3 - Compute N(e), which corresponds to the number of boxes of
size 'e'
% which contains at least one object pixel.
% 4 - If e > 1 then e = e / 2 and repeat step 3.
% 5 - Compute the points log(N(e)) x log(1/e) and use the least
squares
% method to fit a line to the points.
% 6 - The returned Hausdorff fractal dimension D is the slope of
the line.
```

Per tal de comprovar si els resultats obtinguts amb el MatLab són fiables i es poden extreure conclusions, he calculat la dimensió fractal d'un tumor benigne (B.07) i un maligne (M.04) amb el Box-Counting manual.

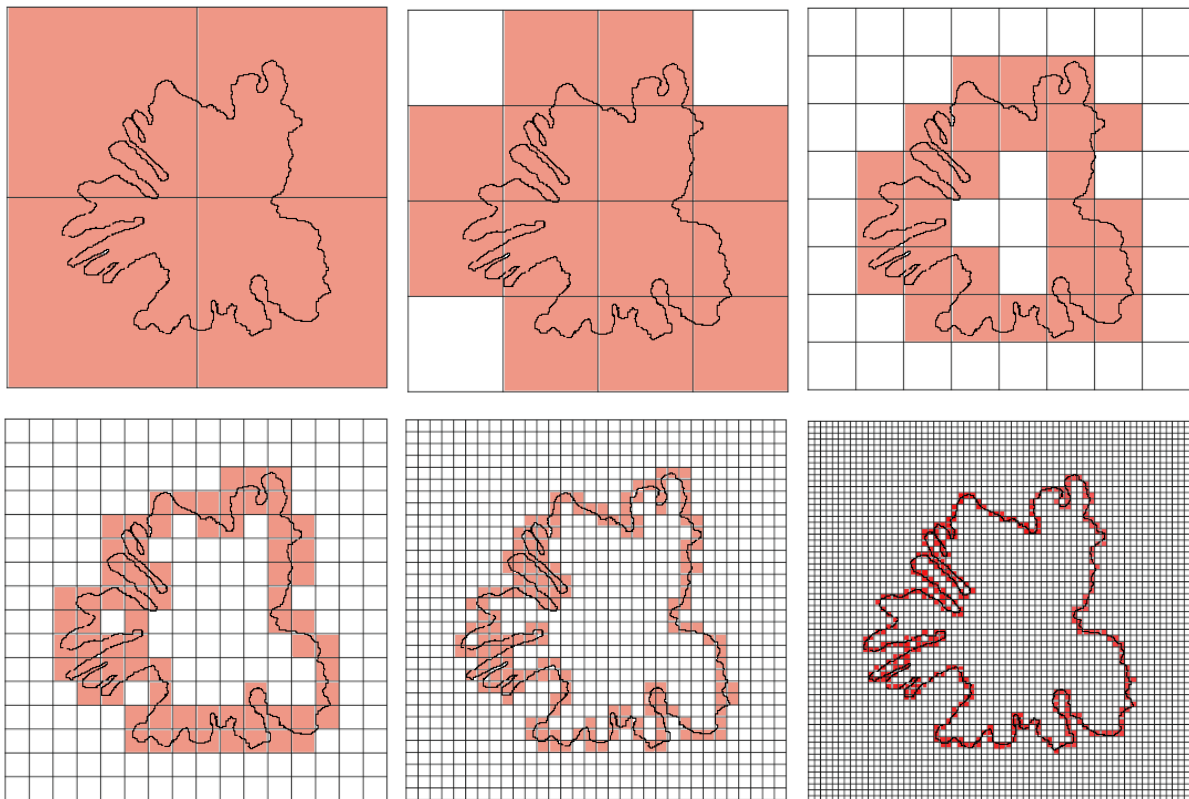
Les graelles que he utilitzat pel Box-Counting són les següents. He pintat de color rosa els quadrats que formen part del contorn a cada graella i que posteriorment s'han de contar.

⁵¹ <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/30329-hausdorff-box-counting-fractal-dimension>

B.07



M.04



C) Resultats i conclusions

He organitzat els resultats en una taula i he tret les conclusions corresponents.

Per treure conclusions de l'eficència d'un mètode de diagnòstic mèdic s'utilitzen els termes d'especificitat i sensibilitat:

- **Especificitat:** és la probabilitat de classificar correctament els pacients que donen negatiu en la prova realitzada. És a dir, és la capacitat de detectar persones sanes. Els pacients que donen negatiu en una prova s'anomenen verdaers negatius (VN). Aquells que donen positiu però en veritat no pateixen la malaltia s'anomenen falsos positius (FP). La fórmula per calcular l'especificitat és:

$$\text{Especificitat} = \frac{VN}{VN+FP}$$

- **Sensibilitat:** és la probabilitat de classificar correctament els pacients que donen positiu en la prova realitzada. És a dir, és la capacitat de detectar persones malaltes. Els pacients que donen positiu en un prova s'anomenen verdaers positius (VP). Aquells que donen negatiu però que en veritat sí pateixen la malaltia s'anomenen falsos negatius (FN). La fórmula per calcular la sensibilitat és:

$$\text{Sensibilitat} = \frac{VP}{VP+FN}$$

Per poder realitzar bé aquest càlculs primer es realitza una taula que recull l'informació sobre VP, VN, FP i FN. El model de la taula seria el següent:

		Malaltia	
		Absent	Present
Prova de diagnòstic	Negativa	VN	FN
	Positiva	FP	VP

Per treure conclusions he realitzat tant la taula com els càlculs d'especificitat i sensibilitat.

11.3. RESULTATS

11.3.1. Box-Counting

Les taules següents mostren el número de caixes ($N(r)$) que formen part del contorn per cada mida de graella (r).

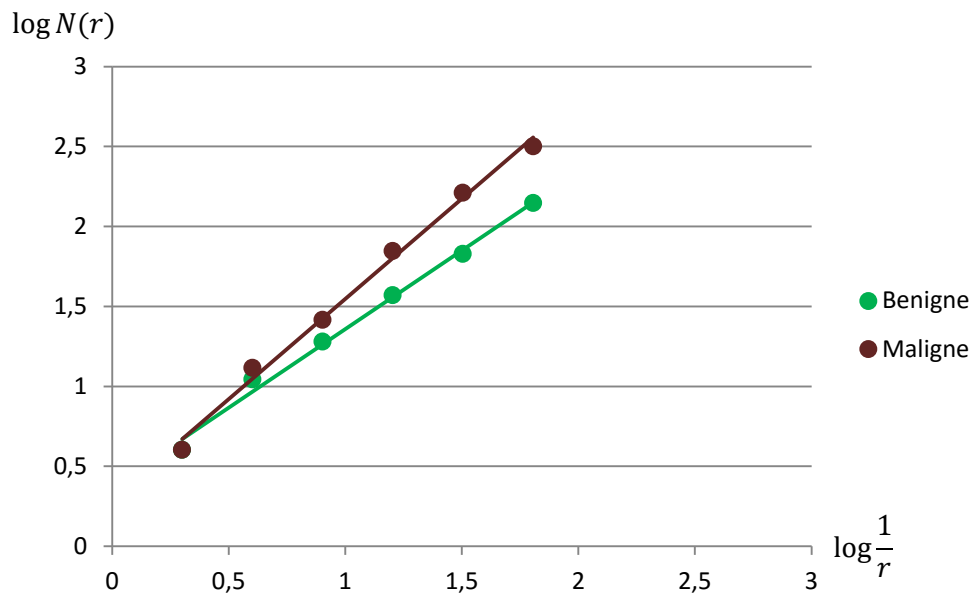
B.07

	$N(r)$	r
Gràfica 1	4	$1/2$
Gràfica 2	11	$1/4$
Gràfica 3	19	$1/8$
Gràfica 4	37	$1/16$
Gràfica 5	67	$1/32$
Gràfica 6	140	$1/64$

M.04

	$N(r)$	r
Gràfica 1	4	$1/2$
Gràfica 2	13	$1/4$
Gràfica 3	26	$1/8$
Gràfica 4	70	$1/16$
Gràfica 5	162	$1/32$
Gràfica 6	316	$1/64$

Fem la gràfica corresponent:



Els resultats són:

Dimensió fractal del tumor benigne (B.07): 1,1882

Dimensió fractal del tumor maligne (M.04): 1,3839

11.3.2. MatLab

Les dimensions fractals obtingudes amb el MatLab són aquestes:

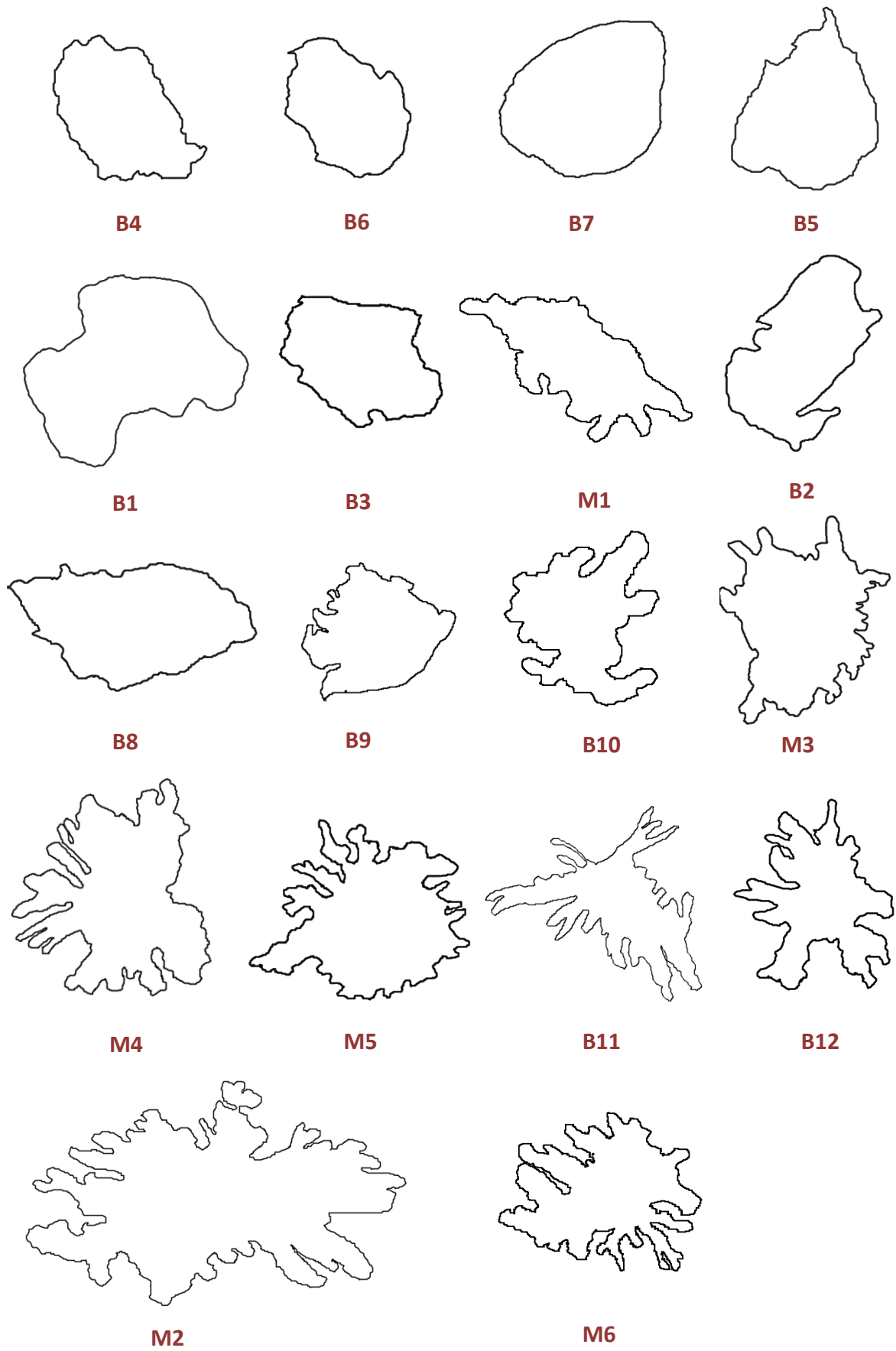
Benignes	DF
B.01	1,1728
B.02	1,1871
B.03	1,1756
B.04	1,1422
B.05	1,1683
B.06	1,1439
B.07	1,1623
B.08	1,1910
B.09	1,1915
B.10	1,2274
B.11	1,2824
B.12	1,2839

Malignes	DF
M.01	1,1847
M.02	1,2879
M.03	1,2542
M.04	1,2743
M.05	1,2769
M.06	1,3372

11.4. CONCLUSIONS MATLAB

La dimensió fractal (DF) mitjana dels tumor benignes és de $1,1940 \pm 0,0898$ i la dels tumors malignes és de $1,2692 \pm 0,0845$.

Quan ordenem els tumors de DF més baixa a DF més alta observem que també els estem ordenant per irregularitat. Els tumors que tenen una dimensió fractal més baixa són els menys irregulars (i solen coincidir amb els benignes) mentre que els que tenen una dimensió fractal més alta són més irregulars (i solen coincidir amb els malignes). Ho observem en la imatge següent:



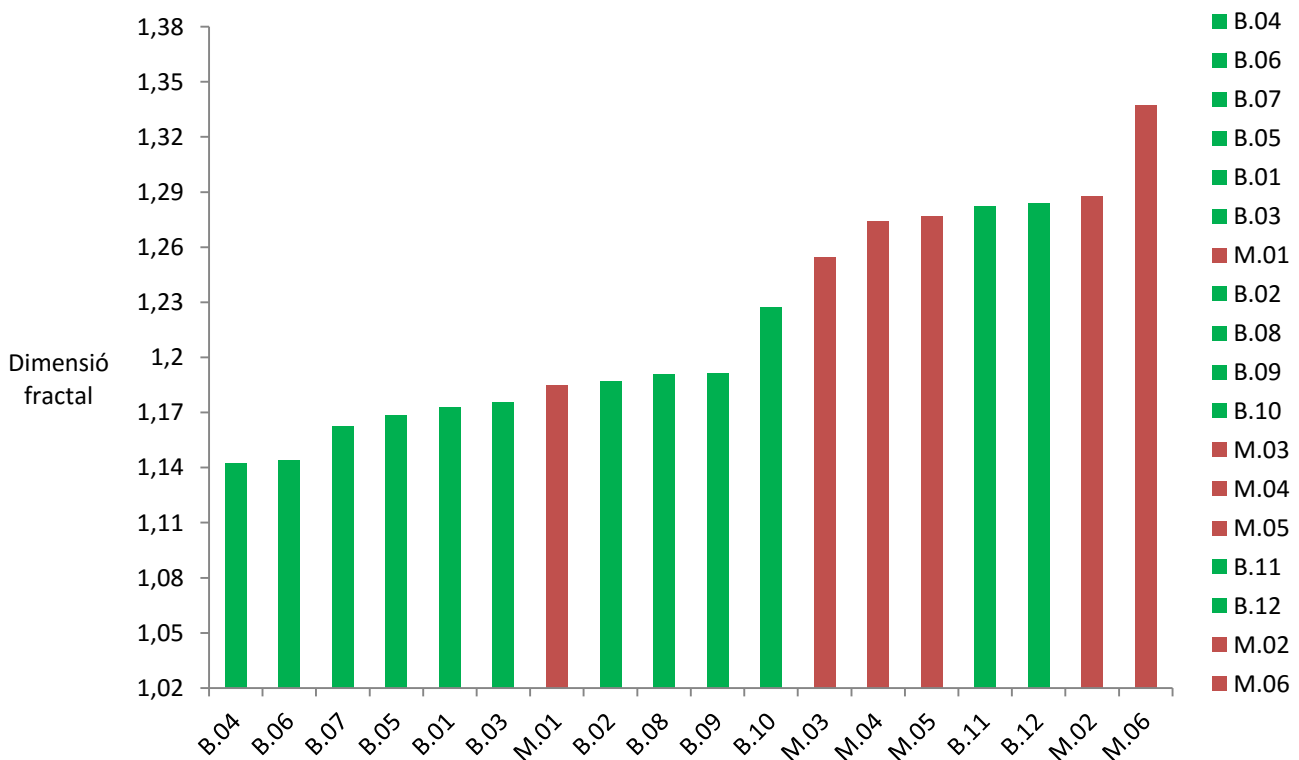
Contorn dels tumors ordenats segons la seva dimensió fractal: de més baixa a més alta⁵²

⁵² Imatge propia

La dimensió fractal mesura el grau d'irregularitat d'un objecte: és per això que com més irregular és l'objecte més alta és la seva dimensió fractal. En el càncer de mama, els tumors malignes tendeixen a ser els més irregulars. Conseqüentment la seva DF és més alta que la dels benignes. A més, la dimensió fractal també mesura el grau d'ocupació del fractal en l'espai. Els tumors malignes solen ser més grans que els benignes, és a dir, ocupen més espai. Aquest fet també ha jugat en els resultats i ha fet que els tumors que són més grans tinguin una DF més elevada. És per això que potser, el tumor que sembla més llis de tots (B7) no té la DF més baixa sinó que està en tercera posició.

Tot i que la regla diu que els tumors benignes tenen marges expansius ja he explicat que sempre hi ha excepcions. Els tumors B10, B11 i B12 presenten marges infiltratius i per tant forma de malignes. És per això que, tot i ser benignes, la seva DF es troba entre les malignes. El mateix passa però a l'inrevés: el tumor M1 presenta marges expansius i forma benigne. Per aquest motiu la seva DF és similar a les obtingudes en els tumors benignes.

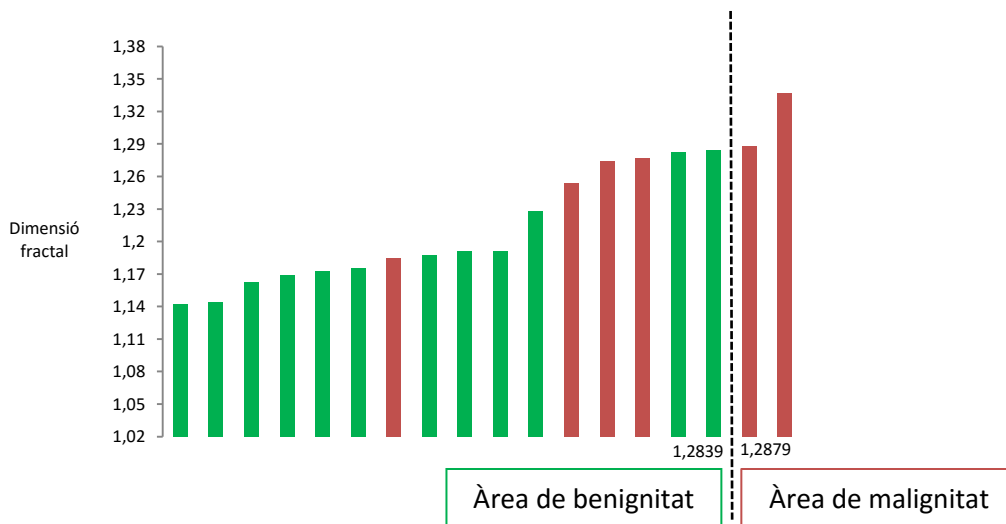
A continuació trobem realitzada la gràfica corresponent a la imatge anterior, on estan ordenades les dimensions fractals de més baixa a més alta. A partir d'ella he tret les conclusions següents.



Com s'observa a la gràfica, les DF obtingudes en tumors benignes i malignes comparteixen valors numèrics, és a dir, es troben barrejades. Per tant, amb aquesta mostra, no podem assignar un valor numèric de DF fractal que ens indiqui benignitat o malignitat. Això només hauria estat possible si els valors de DF entre tumors benignes i malignes estiguessin clarament diferenciats, és a dir, si hi hagués hagut un interval entre ells.

Tot i això, observant la distribució de DF obtingudes en aquesta mostra, podem establir 3 possibles valors representatius de distinció entre malignitat i benignitat. Aquests 3 supòsits són els següents:

1. Establir el límit de benignitat i malignitat entre la DF del tumor B.12 (1,2839) i la del M.02 (1,2879).



La taula resum que obtenim és la següent:

	Tumors Benignes	Tumor Malignes
DF benigna	12	4
DF maligna	0	2

Especificitat

$$\frac{12}{12 + 0} = 1$$

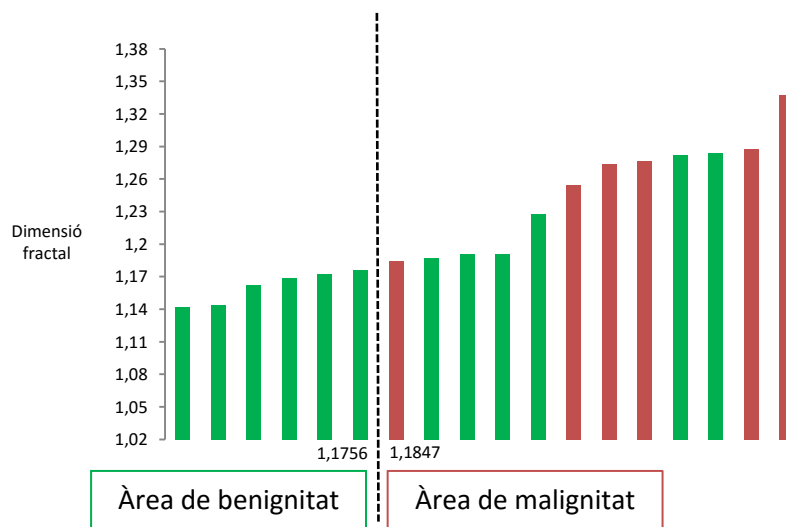
Sensibilitat

$$\frac{2}{2 + 4} = 0,33$$

En aquest cas hi hauria 4 falsos negatius, és a dir, 4 tumors malignes assignats amb una DF benigna. Aquest procediment és específic perquè que detecta tots els tumors benignes, és a dir, totes les persones sanes.

Establir la línia entre aquests dos valors no donaria lloc a un mètode diagnòstic fiable. Podríem detectar tots els tumors benignes però passaríem per alt el 66,66% dels tumors malignes d'aquesta mostra.

2. Establir el límit de benignitat i malignitat entre la DF del tumor B.03 (1,1756) i la del M.01 (1,1847).



La taula resum que obtenim és la següent:

	Tumors Benignes	Tumor Malignes
DF benigna	6	0
DF maligna	6	6

Especifitat

$$\frac{6}{6 + 6} = 0,5$$

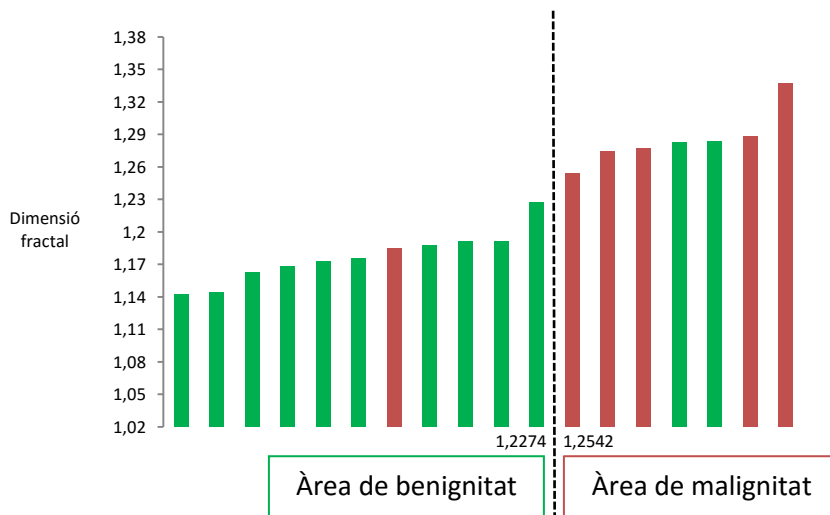
Sensibilitat

$$\frac{6}{6 + 0} = 1$$

En aquest cas no hi hauria cap fals negatiu però si 6 falsos positius, és a dir, 6 tumors benignes assignats amb una DF maligna. Aquest procediment és sensible perquè detecta tots els tumors malignes, és a dir, totes les persones malaltes.

Si establíssim la línia entre aquests dos valors detectaríem tots els tumors malignes però estaríem diagnosticant incorrectament el 50% dels tumors benignes d'aquesta mostra.

3. Establir el límit de benignitat i malignitat entre la DF del tumor B.10 (1,2274) i la del M.03 (1,2542).



La taula resum que obtenim és la següent:

	Tumors Benignes	Tumor Malignes
DF benigna	10	1
DF maligna	2	5

$$\text{Especifitat} = \frac{10}{10 + 2} = 0,83$$

$$\text{Sensibilitat} = \frac{5}{5 + 1} = 0,83$$

En aquest cas tenim valors elevats tant d'especificitat com de sensibilitat. Diagnosticaríem malament el 16,6% dels tumors benignes i el 16,6% dels tumors malignes d'aquesta mostra.

Per obtenir resultats precisos caldria fer l'estudi amb una mostra molt superior a la meva. Tenint en compte que en una mostra gran també és possible que els resultats no es trobin diferenciats, des del meu punt de vista el supòsit 2 seria el més viable. Tot i que presenta un elevat percentatge de tumors benignes diagnosticats incorrectament, tots els malignes sí estan ben diagnosticats. Per tant la dimensió fractal permetria, en aquest cas, diagnosticar tumors benignes, ja que el 100% de tumors de l'àrea de benignitat tenen aquest comportament. S'evitaria així que aquests pacients hi haguessin d'utilitzar altres tècniques de diagnòstic invasives. Per altra banda, tots els tumors de l'àrea de malignitat s'haurien de confirmar amb una tècnica invasiva, però amb la seguretat que tots els tumors amb aquest comportament s'hi troben inclosos. Això s'ha d'observar com un fet positiu, ja que els tumors malignes tindrien un doble diagnòstic més segur i correcte.

La dimensió fractal està relacionada directament amb la irregularitat i així ha quedat demostrat amb aquest estudi: els tumors més irregulars són els que presenten una dimensió fractal més gran. I per tant, utilitzant com a mostra tumors de càncer de mama, podem arribar a dir que els tumors benignes tenen una dimensió fractal inferior als malignes.

11.5. CONCLUSIONS BOX-COUNTING

El resultat de la DF del B7 mitjançant el Box-Counting és d'1,1882 i mitjançant el MatLab és de 1,1623. Els resultats són molt similars als del MatLab i donarien, en els tres supòsits, el mateix pronòstic: benigne. Per l'altra banda, el resultat de la DF del M4 mitjançant el Box-Counting és d'1,3839 i mitjançant el MatLab és de 1,2743. En aquest cas els resultats varien significativament però el pronòstic, en els tres supòsits, seguiria sent el mateix: maligne. És possible que variï perquè el MatLab hagi utilitzat una escala de reducció de graelles diferent a la meva. Aquest motiu podria haver fet variar el resultat.

12. CONCLUSIONS DEL TREBALL

La redacció d'aquest treball m'ha permès introduir-me en una nova geometria i en una de les seves aplicacions. Durant el treball de recerca he aconseguit estudiar els objectius inicials i dur a terme l'estudi fractal del comportament tumoral.

Pel que fa als fractals he vist les seves quatre característiques i les he demostrat mitjançant petits exemples pràctics. Una vegada coneguda la seva història i propietats he arribat a la conclusió que la geometria fractal ens permet representar el món d'una manera més acurada i real, i això és el que ha fet que tingui tantes aplicacions. Els fractals ens obren la porta a moltíssims aspectes de la nostra vida i ens la poden arribar a fins i tot facilitar, com és el cas pràctic que he realitzat al meu treball. La seva complexitat és una perfecta eina de comprensió dels problemes actuals. Per això crec que investigar utilitzant els fractals com a mitjà, sigui en un àmbit mèdic o no, és una opció encertada.

Actualment, per saber si un tumor és benigne o maligne s'utilitza la biòpsia. Aquest mètode consisteix en l'extracció d'una mostra de teixit per ser analitzada posteriorment al laboratori. Tot i que és un procediment senzill, depèn d'on estigui situat el tumor, la biòpsia es pot convertir en una operació complexa. És per això, que altres mètodes s'estan investigant, com per exemple l'anàlisi fractal. Tots els mètodes que s'investiguen no pretenen substituir la biòpsia (ja que és l'opció més fiable i molts cops útil en el tractament) sinó complementar-la abans d'haver d'arribar a una operació amb risc.

Amb l'estudi que he fet he arribat a la conclusió que utilitzar l'anàlisi fractal com a diagnòstic per imatge no pot ser gaire fiable, ja que les excepcions són múltiples. Tot i això, no és un procediment invasiu pel nostre organisme i per tant crec que s'ha d'aprofitar. L'anàlisi fractal, des del meu punt de vista, seria un bon mètode de prioritització. Realitzar l'extracció d'una part de teixit és un procés que, tot i que no és gaire llarg, també necessita el seu temps. Tots els dies que es puguin guanyar són essencials per no fer metàstasi. Per aquest motiu si féssim l'anàlisi fractal del tumor, que no tardaríem més d'unes hores, podríem destriar entre malignes i benignes per

agilitzar els tràmits o biòpsia d'aquells tumors que el metge considerés que poden tenir més risc.

Una possibilitat d'ampliació del treball seria estudiar els diferents càncers amb les seves característiques corresponents. D'aquesta manera podríem arribar a establir els criteris de benignitat i malignitat mitjançant l'anàlisi fractal de cada tipus de tumor. És a dir, si per exemple, en un tipus de neoplàsies els tumors benignes són els que tinguessin els marges infiltratius i els malignes els marges expansius arribaríem a la conclusió que en aquell teixit els tumors benignes tenen una dimensió fractal superior als tumors malignes. Per a mi la realització d'aquests estudis és impossible per manca de coneixement i recursos. Hi ha molts tipus de tumors a estudiar i això requeriria una gran quantitat de temps a més d'un domini important del món tumoral. Crec que un estudi d'aquest estil mereixeria la pena, ja que aquest mètode podria tenir un bon futur clínic.

13. BIBLIOGRAFIA

- BINIMELIS, Maria Isabel. *Una nueva manera de ver el mundo: la geometría fractal*. RBA Libros, Barcelona, 2010.
- CARRERO, Gustavo. PDF: “Caracterización de imágenes nodulares en mamografía por medio de dimensión fractal”. Universidad Central de Venezuela, Facultades de Ciencias y Medicina, Caracas, Febrero, 2007.
- MANDELBROT, Benoît. *Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión*. Círculo de lectores S.A., Barcelona, 1997.
- M. RANGAYYAN, Rangaraj; M. NGUYEN, Thanh. “Fractal Analysis of Contours of Breast Masses in Mammograms”. Dins: *Journal of Digital Imaging*, vol. 20, núm. 3, Estats Units, Setembre del 2007, pàg. 223-237.
- OLIVA, Rafael; ORIOLA, Josep; BALLESTA, Francisca; CLÀRIA, Joan; MENGUAL, Lourdes. *Genètica mèdica*. Publicacions i edicions de la Universitat de Barcelona, Espanya, 2013.
- ORDI I MAJÀ, Jaume; et al. *Anatomia patològica general*. Publicacions i edicions de la Universitat de Barcelona, Espanya, 2006.
- REYES, Miguel. PDF: “Fractales”. Dpto. de Matemática Aplicada, Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid.
- SABOGAL, Sonia; ARENAS Gilberto. PDF: “Una introducción a la geometría fractal”. Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2011.
- SASTRE, M^a Asunción. PDF: “Geometría Fractal”. Dpto. de Matemática Aplicada, Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid.

ANNEX I

Càlculs de les primeres òrbites del Conjunt M:

$$p_1 \rightarrow c = (-2 + 2i)$$
$$z_1 = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2,82$$

$$p_2 \rightarrow c = (-1,5 + 2i)$$
$$z_1 = \sqrt{(-1,5)^2 + 2^2} = 2,50$$

$$p_3 \rightarrow c = (-1 + 2i)$$
$$z_1 = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = 2,23$$

$$p_4 \rightarrow c = (-0,5 + 2i)$$
$$z_1 = \sqrt{(-0,5)^2 + 2^2} = 2,06$$

$$p_5 \rightarrow c = (0 + 2i)$$
$$z_1 = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2,00$$

$$p_6 \rightarrow c = (0,5 + 2i)$$
$$z_1 = \sqrt{0,5^2 + 2^2} = 2,06$$

$$p_7 \rightarrow c = (1 + 2i)$$
$$z_1 = \sqrt{1^2 + 2^2} = 2,23$$

$$p_8 \rightarrow c = (1,5 + 2i)$$
$$z_1 = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = 2,50$$

$$p_9 \rightarrow c = (2 + 2i)$$
$$z_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2,82$$

$$p_{10} \rightarrow c = (-2 + 1,5i)$$
$$z_1 = \sqrt{(-2)^2 + 1,5^2} = 2,50$$

$$p_{11} \rightarrow c = (-1,5 + 1,5i)$$
$$z_1 = \sqrt{(-1,5)^2 + 1,5^2} = 2,12$$

$$p_{12} \rightarrow c = (-1 + 1,5i)$$
$$z_1 = \sqrt{(-1)^2 + 1,5^2} = 1,80$$
$$z_2 = (-1 + 1,5i)^2 + (-1 + 1,5i)$$
$$z_2 = (1 - 3i + 2,25i^2) + (-1 + 1,5i)$$
$$z_2 = (-1,25 - 3i) + (-1 + 1,5i)$$
$$z_2 = (-2,25 + 1,5i)$$
$$z_2 = \sqrt{(-2,25)^2 + 1,5^2} = 2,70$$

$$p_{13} \rightarrow c = (-0,5 + 1,5i)$$
$$z_1 = \sqrt{(-0,5)^2 + 1,5^2} = 1,58$$
$$z_2 = (-0,5 + 1,5i)^2 + (-0,5 + 1,5i)$$
$$z_2 = (0,25 - 1,5i + 2,25i^2) + (-0,5 + 1,5i)$$
$$z_2 = (-2 - 1,5i) + (-0,5 + 1,5i)$$
$$z_2 = (-2,5 + 0i)$$
$$z_2 = \sqrt{(-2,5)^2 + 0^2} = 2,50$$

$$p_{14} \rightarrow c = (0 + 1,5i)$$
$$z_1 = \sqrt{0^2 + 1,5^2} = 1,5$$
$$z_2 = (0 + 1,5i)^2 + (0 + 1,5i)$$
$$z_2 = (0 + 3i + 2,25i^2) + (0 + 1,5i)$$
$$z_2 = (-2,25 + 3i) + (0 + 1,5i)$$
$$z_2 = (-2,25 + 4,5i)$$
$$z_2 = \sqrt{(-2,5)^2 + 4,5^2} = 5,03$$

$$p_{15} \rightarrow c = (0,5 + 1,5i)$$

$$z_1 = \sqrt{0,5^2 + 1,5^2} = 1,58$$

$$z_2 = (0,5 + 1,5i)^2 + (0,5 + 1,5i)$$

$$z_2 = (0,25 + 0,75i + 2,25i^2) + (0,5 + 1,5i)$$

$$z_2 = (-2 + 0,75i) + (0,5 + 1,5i)$$

$$z_2 = (-1,5 + 2,25i)$$

$$z_2 = \sqrt{(-1,5)^2 + 2,25^2} = 2,70$$

$$p_{16} \rightarrow c = (1 + 1,5i)$$

$$z_1 = \sqrt{1^2 + 1,5^2} = 1,80$$

$$z_2 = (1 + 1,5i)^2 + (1 + 1,5i)$$

$$z_2 = (1 + 3i + 2,25i^2) + (1 + 1,5i)$$

$$z_2 = (-1,25 + 3i) + (1 + 1,5i)$$

$$z_2 = (-0,25 + 4,5i)$$

$$z_2 = \sqrt{(-0,25)^2 + 4,5^2} = 4,50$$

$$p_{17} \rightarrow c = (1,5 + 1,5i)$$

$$z_1 = \sqrt{1,5^2 + 1,5^2} = 2,12$$

$$p_{18} \rightarrow c = (2 + 1,5i)$$

$$z_1 = \sqrt{2^2 + 1,5^2} = 2,50$$

$$p_{19} \rightarrow c = (-2 + 1i)$$

$$z_1 = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = 2,23$$

$$p_{20} \rightarrow c = (-1,5 + 1i)$$

$$z_1 = \sqrt{(-1,5)^2 + 1^2} = 1,80$$

$$z_2 = (-1,5 + 1i)^2 + (-1,5 + 1i)$$

$$z_2 = (2,25 - 3i + 1i^2) + (-1,5 + 1i)$$

$$z_2 = (1,25 - 3i) + (-1,5 + 1i)$$

$$z_2 = (-0,25 - 2i)$$

$$z_2 = \sqrt{(-0,25)^2 + (-2)^2} = 2,01$$

$$p_{22} \rightarrow c = (-0,5 + 1i)$$

$$z_1 = \sqrt{(-0,5)^2 + 1^2} = 1,11$$

$$z_2 = (-0,5 + 1i)^2 + (-0,5 + 1i)$$

$$z_2 = (0,25 - 1i + 1i^2) + (-0,5 + 1i)$$

$$z_2 = (-0,75 - 1i) + (-0,5 + 1i)$$

$$z_2 = (-1,25 + 0i)$$

$$z_2 = \sqrt{(-1,25)^2 + 0^2} = 1,11$$

$$z_2 = (-1,25)^2 + (-0,5 + 1i)$$

$$z_2 = \sqrt{(1,06)^2 + 0^2} = 1,45$$

$$p_{21} \rightarrow c = (-1 + 1i)$$

$$z_1 = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = 1,41$$

$$z_2 = (-1 + 1i)^2 + (-1 + 1i)$$

$$z_2 = (1 - 2i + 1i^2) + (-1 + 1i)$$

$$z_2 = (-2i) + (-1 + 1i)$$

$$z_2 = (-1 - 1i)$$

$$z_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = 1,41$$

$$z_3 = (-1 - 1i)^2 + (-1 + 1i)$$

$$z_3 = (1 + 2i + 1i^2) + (-1 + 1i)$$

$$z_2 = (2i) + (-1 + 1i)$$

$$p_{23} \rightarrow c = (0 + 1i)$$

$$z_1 = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

$$z_2 = (0 + 1i)^2 + (0 + 1i)$$

$$z_2 = (1i^2) + (0 + 1i)$$

$$z_2 = (-1) + (0 + 1i)$$

$$z_2 = (-1 + 1i)$$

$$z_2 = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = 1,41$$

$$z_3 = (-1 + 1i)^2 + (-1 + 1i)$$

$$z_3 = (1 - 2i + 1i^2) + (-1 + 1i)$$

$$z_2 = (-2i) + (-1 + 1i)$$

$$z_2 = (-1 + 3i)$$

$$z_2 = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = 3,16$$

$$z_2 = (-1 - 1i)$$

$$z_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = 1,41$$

$$p_{24} \rightarrow c = (0,5 + 1i)$$

$$z_1 = \sqrt{(0,5)^2 + 1^2} = 1,11$$

$$z_2 = (0,5 + 1i)^2 + (0,5 + 1i)$$

$$z_2 = (0,25 + 1i + 1i^2) + (0,5 + 1i)$$

$$z_2 = (-1,25 + 1i) + (0,5 + 1i)$$

$$z_2 = (-0,75 + 2i)$$

$$z_2 = \sqrt{(-0,75)^2 + 2^2} = 2,13$$

$$p_{25} \rightarrow c = (1 + 1i)$$

$$z_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = 1,41$$

$$z_2 = (1 + 1i)^2 + (1 + 1i)$$

$$z_2 = (1 + 2i + 1i^2) + (1 + 1i)$$

$$z_2 = (2i) + (1 + 1i)$$

$$z_2 = (1 + 3i)$$

$$z_2 = \sqrt{1^2 + 3^2} = 3,16$$

$$p_{26} \rightarrow c = (1,5 + 1i)$$

$$z_1 = \sqrt{1,5^2 + 1^2} = 1,80$$

$$z_2 = (1,5 + 1i)^2 + (1,5 + 1i)$$

$$z_2 = (2,25 + 3i + 1i^2) + (1,5 + 1i)$$

$$z_2 = (1,25 + 3i) + (1,5 + 1i)$$

$$z_2 = (2,75 + 4i)$$

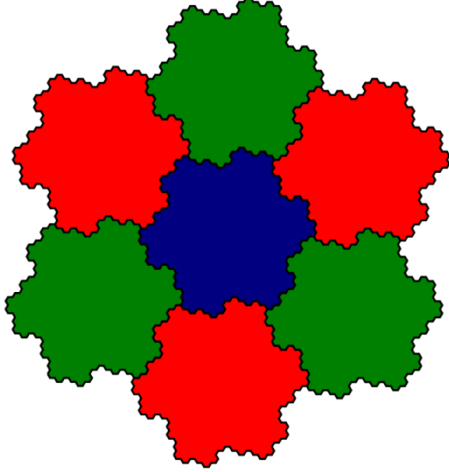
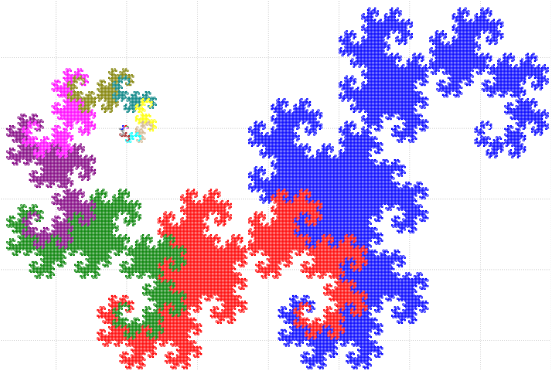
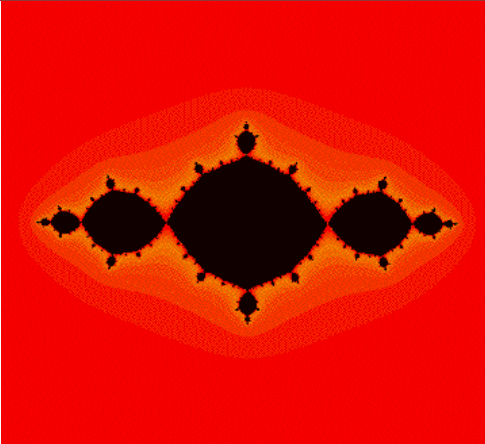
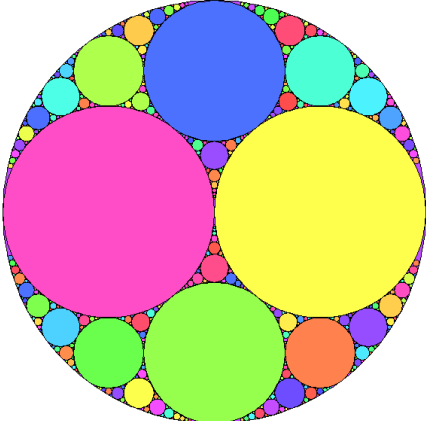
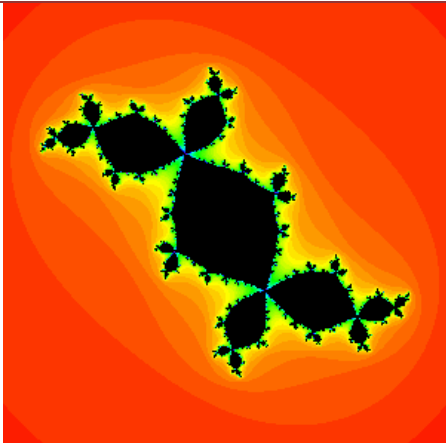
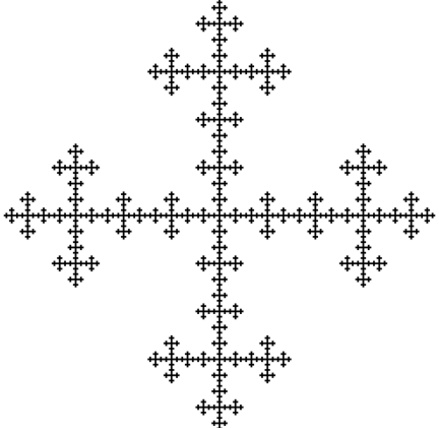
$$z_2 = \sqrt{2,75^2 + 4^2} = 4,85$$

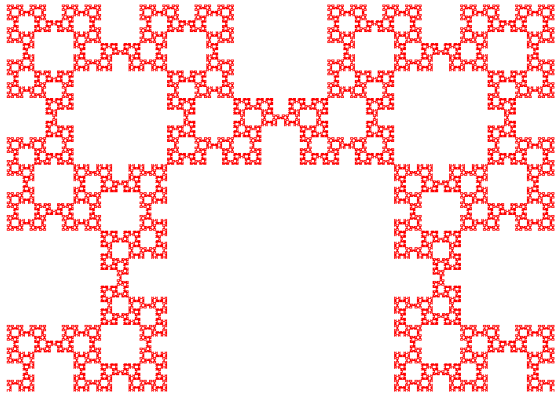
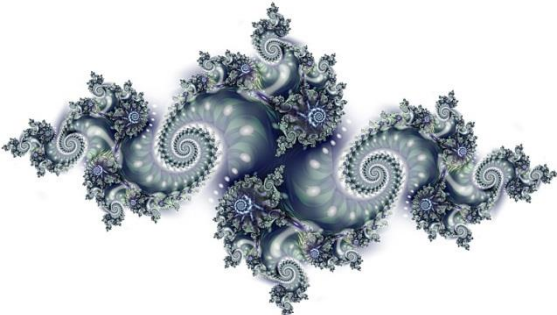
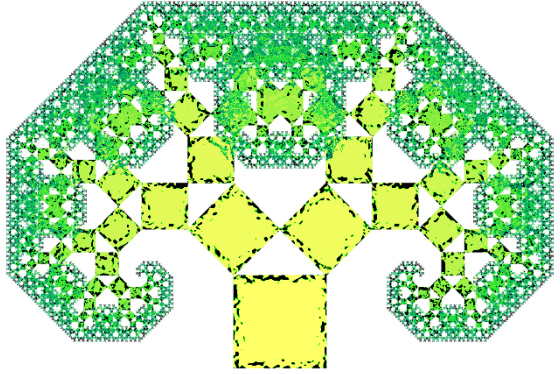
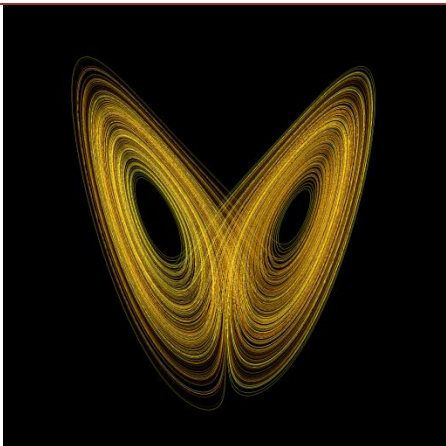
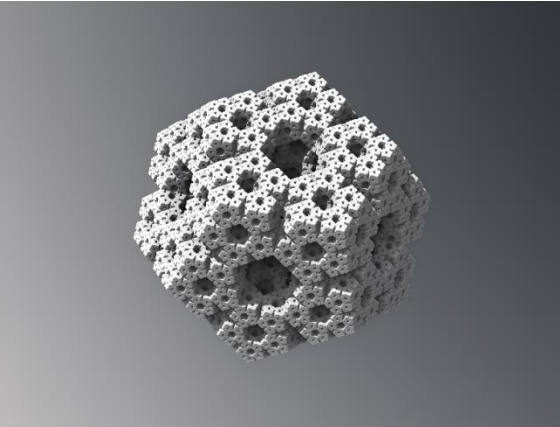
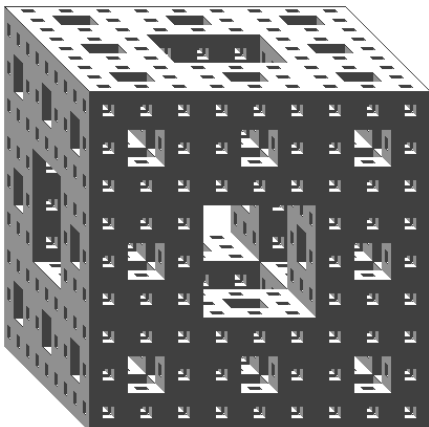
$$p_{27} \rightarrow c = (2 + 1i)$$



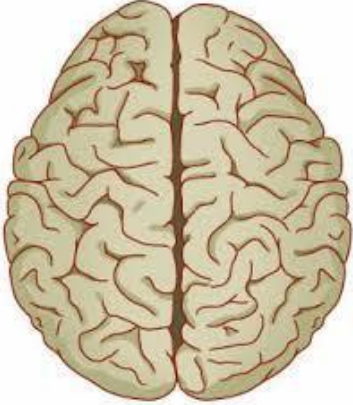
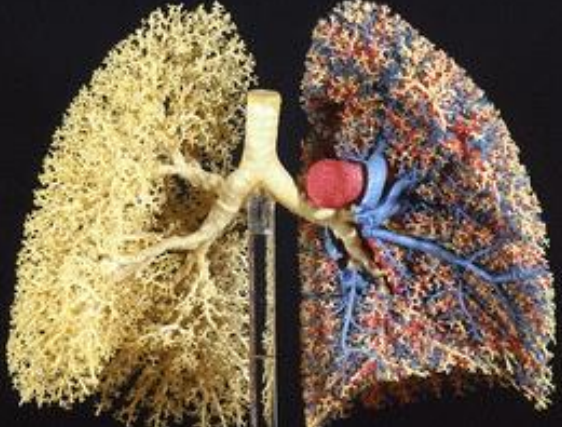
$$z_1 = \sqrt{2^2 + 1^2} = 2,23$$

ANNEX II

Recull de diferents fractals i de la seva dimensió de Hausdorff-Besicovitch.

 A fractal shape composed of seven smaller copies of itself, arranged in a central blue square surrounded by six other shapes (three red and three green) in a hexagonal pattern.	 A fractal curve on a grid, colored in various colors (blue, red, green, purple, yellow) to show its self-similar structure.
<p>Gosper Island (DF: 1,0686)</p>	<p>Dragon curve (DF: 1,2619)</p>
 A fractal set on a red background, showing a central black region with intricate, self-similar patterns.	 A fractal set consisting of a circle filled with smaller, colored circles (pink, yellow, green, blue, orange) that are tangent to each other and the boundary.
<p>Conjunto de Julia (DF: 1,2683)</p>	<p>Tamiz de Apolonio (DF: 1,3057)</p>
 A fractal set on a red background, showing a central black region with intricate, self-similar patterns, resembling a rabbit.	 A fractal set consisting of a central cross shape with smaller crosses attached to its arms, forming a self-similar pattern.
<p>Conill de Douady (DF: 1,3934)</p>	<p>Vicsek Fractal (DF: 1,4649)</p>

 <p>A fractal structure composed of red lines forming a complex, branching pattern. It consists of a central horizontal line with several smaller branches extending upwards and downwards, creating a dense, intricate network of lines.</p>	 <p>A fractal image showing a complex, self-similar structure with a blue and green color palette. It features intricate, swirling patterns that resemble a fractal tree or a complex geometric shape, with a central blue area and green, branching structures extending outwards.</p>
<p>Fibonacci Fractal (<i>DF: 1,6379</i>)</p>	<p>Conjunt de Julia (<i>DF: 2</i>)</p>
 <p>A fractal image showing a complex, self-similar structure with a green and yellow color palette. It features a central yellow square with green, branching structures extending outwards, resembling a fractal tree or a complex geometric shape.</p>	 <p>A fractal image showing a complex, self-similar structure with a yellow and orange color palette. It features a central yellow area with orange, branching structures extending outwards, resembling a fractal tree or a complex geometric shape.</p>
<p>Arbre de Pitàgores (<i>DF: 2</i>)</p>	<p>Atractor de Lorenz (<i>DF: 2,06</i>)</p>
 <p>A fractal image showing a complex, self-similar structure with a grey and white color palette. It features a central grey area with white, branching structures extending outwards, resembling a fractal tree or a complex geometric shape.</p>	 <p>A fractal image showing a complex, self-similar structure with a black and white color palette. It features a central black area with white, branching structures extending outwards, resembling a fractal tree or a complex geometric shape.</p>
<p>Dodecaedre fractal (<i>DF: 2,3296</i>)</p>	<p>Esponja de Menger (<i>DF: 2,7268</i>)</p>

	
<p>Costa de Gran Bretanya (<i>DF: 1,24</i>)</p>	<p>Romanescu (<i>DF: 1,33</i>)</p>
	
<p>Superfície del cervell (<i>DF: 2,50</i>)</p>	<p>Superfície pulmonar (<i>DF: 2,97</i>)</p>

53

⁵³ Taula resum de l'annex de Wikipedia: *Fractals per dimensió de Hausdorff*.

